

Diskrétna matematika II.

A

9.6.2005

Príklady si prečítajte pozorne. Riešenia píšete podrobne, uveďte všetky argumenty. Každý príklad píšete na samostatný papier (kvôli opravovaniu). Nezabudnite každý papier podpísať.

1. (10 bodov) Nech $G = (V, E)$ je neorientovaný graf bez slučiek. Dokážte, že ak $st(v) \geq 2$ pre všetky vrcholy $v \in V$, tak G obsahuje cyklus.
2. (20 bodov) Dokážte, že neorientovaný graf bez slučiek na n vrcholoch, ktorý má viac ako $\binom{n-1}{2}$ hrán, je súvislý. Ukážte, že $\binom{n-1}{2}$ hrán nestačí.
3. (15 bodov) Dokážte, že kompletný bipartitný graf $K_{3,3}$ nie je rovinný.
4. (10 bodov) Nech S je množina všetkých takých postupností $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ prirodzených čísel, pre ktoré $\exists n_0$ také, že $s_n = 0$ pre $\forall n \geq n_0$. Ukážte, že S je spočítateľná množina.
5. (15 bodov) Nech \mathcal{R} je usporiadanie množiny A a nech $B \subseteq A$. Ukážte, že $\mathcal{R} \cap B^2$ je usporiadanie B .
6. (15 bodov) Ak $|A| \leq |B|$, to jest existuje injektívne zobrazenie z A do B , a ak $A \neq \emptyset$, tak existuje zobrazenie B na A .
7. (15 bodov) Nech $T = (V, E)$ je strom s koreňom r . Na množine vrcholov V definujeme reláciu R takto: pre $x, y \in V$, xRy , ak $x = y$ alebo x leží na ceste z r do y . Dokážte, že R je čiastočné usporiadanie.

8. (20bodov) Nech $G = (V, E)$ je neorientovaný graf bez slučiek. Na množine hrán E definujme reláciu R takto: Pre $e_1, e_2 \in E$ je $e_1 R e_2$, ak $e_1 = e_2$ alebo ak e_1 a e_2 sú hrany nejakého cyklu C v grafe G .
- Overte, že R je ekvivalencia na E .
 - Nájdite rozklad E indukovaný reláciou R .
9. (20bodov) Nech M je n -prvková množina. Koľko je relácií ekvivalencie na M s práve
- dvoma triedami ekvivalencie?
 - $n - 1$ triedami ekvivalencie?