Pavel Valtr

Diskrétní matematika

Přepsal Petr Baudiš
v ak. roce 2004/2005

"Beauty is the first test. There is no permanent place in the world for ugly mathematics."
— G. H. HARDY

Verze 1.618/L:1.6. Tato verze není garantována, nemusí být kompletní a může obsahovat chyby.
Aktuální verzi vždy najdete na `http://math.or.cz/`.
Sazba v programu TeX.

Základní pojmy

Množiny

Množina: soubor prvků.

Zápis:

- výčtem prvků: $X = \{a, b, c\}$
- vlastností: $X = \{i \in \mathbb{N} : \exists j \in \mathbb{N},\ i = j\}$

$$X = Y \Leftrightarrow (x \in X \Leftrightarrow x \in Y) \qquad \forall x$$

Je-li X konečná, $|X| \Leftrightarrow \mathrm{len}(X)$ (velikost, mohutnost).

$$X \subseteq Y \Leftrightarrow (x \in X \Rightarrow x \in Y) \qquad \forall x$$

$P(X)$**:** Potenční množina množiny X — množina všech podmnožin množiny X (včetně $\emptyset$ a X). Je-li X konečná, $|P(X)| = 2^{|X|}$.
Symbolika: $|X| \cap |Y|$, $|X| \cup |Y|$, $|X| \setminus |Y|$, ...

Relace

Neuspořádaná dvojice: $\{x, y\}$
Uspořádaná dvojice: (x, y): $(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow (x = x' \wedge y = y')$; např. $\{\{x\}, \{x, y\}\}$
Kartézský součin: $X \times Y = \{(x, y) : x \in X,\ Y \in Y\}$
Relace R **mezi** X**,** Y**:** $R \subseteq X \times Y$
Relace R **na** X**:** $R \subseteq X \times X$
Značení: $(x, y) \in \mathbb{R}$: xRy (jde-li o binární relaci)

Definice:

Relace R na množině X je:

- **reflexivní:** $xRx \qquad \forall x \in X : xRx$
- **symetrická:** $xRy \Rightarrow yRx \qquad \forall x, y \in X$
- **tranzitivní:** $(xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz \qquad \forall x, y, z \in X$
- **ekvivalence:** reflexivní, symetrická, tranzitivní

Třídy ekvivalence

Určené prvkem x:

$$R[x] = \{y \in X, xRy\}$$

(díky symetrii platí i yRx).

Příklad:

$$X = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (2, 4), (4, 2)\}$$
$$R[1] = \{1\}$$
$$R[2] = R[4] = \{2, 4\}$$

Tvrzení:

(i) $x \in R[x] \qquad \forall x \in X$
(ii) $R[x] = R[y] \vee R[x] \cap R[y] = \emptyset \qquad \forall x, y \in X$

DŮKAZ:

(i) Z reflexivity.

(ii) Nechť $x, y \in X$:

(1) Předpokládejme xRy:

$R[x] \subseteq R[y]$: Mějme libovolné $z \in R[x]$, tedy $zRx \overset{\text{tranz.}}{\to} zRy$, to znamená $z \in R[y]$. *Q.E.D.*

$R[y] \subseteq R[x]$ obdobně (symetrie).

$$R[x] = R[y]$$

(2) Předpokládejme, že neplatí xRy:

Pro spor nechť $R[x] \cap R[y] \neq \emptyset$. Mějme libovolné $z \in R[x] \cap R[y]$. Pak jistě $xRz \wedge zRy \overset{\text{tranz.}}{\Rightarrow} xRy$. $\not\sharp$ *Spor*

$$R[x] \cap R[y] = \emptyset$$

Důsledek:

Množina (systém množin) $\{R[x] : x \in X\}$ tvoří tzv. **rozklad** množiny X. $\forall x \in X$ pak patří do právě jedné množiny z rozkladu.

Uspořádání

(Částečné) uspořádání: Relace na X, která je reflexivní, tranzitivní a *antisymetrická* ($xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y \quad \forall x, y \in X$).

Značení: $\leq$ či $\preceq$

Příklady: $(\mathbb{N}, \preceq)$, $(\mathbb{N}, |\,)$ *(dělí)*, $(P(X), \preceq)$

Lineární uspořádání: Takové uspořádání, že $xRy \vee yRx \quad \forall x, y \in X$.

Pozn.: $(P(X), \preceq)$ je lineární, pokud $|X| \leq 1$.

Zobrazení

Definice:

Máme-li množiny X, Y, **zobrazení z** X **do** Y definujeme jako libovolnou relaci $f \subseteq X \times Y$, která splňuje předpoklad, že $\forall x \in X\ \exists!\, y \in Y$ takové, že xfy.

Značení: $f\colon X \to Y$, $f\colon x \mapsto y$, $f(x) = y$

Definice:

Máme-li $f\colon X \to Y$ a $g\colon Y \to Z$, **složené zobrazení** $g \circ f$ značí zobrazení $X \to Z$, definované předpisem:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \qquad \forall x \in X$$

Poznámka:

$g \circ f$ je skutečné zobrazení z X do Z:

$$(g \circ f)(x) = g(\underbrace{f(x)}_{\exists!\, y}) = \underbrace{g(y)}_{\exists!\, z} = z$$

Definice:

Říkáme, že zobrazení $f\colon X \to Y$ je:

- **prosté** (injekce $f\colon X \hookrightarrow Y$), pokud $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y) \quad \forall x, y \in X$.
- **na (z X na Y)** (surjekce $f\colon X \twoheadrightarrow Y$), pokud $\forall y \in Y\ \exists x \in X$ takové, že $f(x) = y$.
- **vzájemně jednoznačné** (bijekce $f\colon X \hookrightarrow\!\!\!\!\twoheadrightarrow Y$ či $f\colon X \xleftrightarrow{1\text{–}1} Y$), pokud je prosté a *na*.

Pro konečné množiny platí:

- prosté: $|X| \leq |Y|$
- *na*: $|X| \geq |Y|$
- bijekce: $|X| = |Y|$

Pozn.: Pojem **funkce** se používá ve významu "zobrazení" či "zobrazení do $\mathbb{R}$".

Kombinatorika

Permutace a faktoriál

Permutace konečné množiny X: Libovolná bijekce $\pi\colon X \overset{1\text{–}1}{\longleftrightarrow} X$.

Příklad:

Mějme množinu $X = \{a, b, c, d\}$, definujme permutaci $\pi(a) = b$, $\pi(b) = d$, $\pi(c) = c$, $\pi(d) = a$. Matice permutace pak je

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & d & c & a \end{pmatrix},$$

permutace tvoří uspořádání

$$(b, d, c, a)$$

a dá se vyjádřit na grafu jako

```
a * ---> * b
     _   |
    |\   |
       \ v
c *<-\   * d
   \-/
```

n **faktoriál:** $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$, $0! = 1$

Tvrzení:

Počet permutací n-prvkové množiny je $n!$.

DŮKAZ:

n možností, kam se zobrazí první prvek.
$n - 1$ možností, kam se zobrazí druhý prvek.
...

VĚTA ():

$|X| = n$, $|Y| = k$. Pak existuje:

- k^n zobrazení $X \to Y$.
- $k(k-1)(k-2)\ldots(k-n+1)$ prostých zobrazení $X \to Y$.
- $k! = n!$ bijekcí $X \overset{1\text{–}1}{\longleftrightarrow} Y$, pokud $k = n$.
- 0 bijekcí $X \overset{1\text{–}1}{\longleftrightarrow} Y$, pokud $k \neq n$.

Kombinační čísla

Definice:

Kombinační číslo (neboli **binomický koeficient**):

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k(k-1)\ldots 1} \qquad n, k \in \mathbb{N}_0,\ n \geq k$$

Alternativní definice:

$\binom{n}{k}$ je počet k-prvkových podmnožin n-prvkové množiny.

Tvrzení:

Obě definice jsou ekvivalentní.

DŮKAZ:

Nechť $|X| = n$. Pak počet uspořádaných k-tic různých prvků z X je kombinatorickou úvahou

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Zároveň však tento počet můžeme spočítat přes kombinační čísla jako (počet k-prvkových podmnožin X)(počet možných uspořádání) $= \binom{|X|}{k}k! = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Q.E.D.

Značení:

Buď X množina. Pak $\binom{X}{k}$ je množina všech k-prvkových podmnožin množiny X. Navíc

$$\left|\binom{X}{k}\right| = \binom{|X|}{k}.$$

Platí:

(i) Symetrie:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad n \geq k \geq 0$$

DŮKAZ:

Z definice kombinačního čísla (algebraicky nebo doplňky).

(ii) Sousední čísla:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

DŮKAZ:

Z množinové definice kombinačního čísla:

$$\left|\binom{X}{k}\right| = \underbrace{\left|\binom{X \setminus \{x_n\}}{k-1}\right|}_{\substack{\text{počet } k\text{-prvkových podm.} \\ \text{množiny } X \text{ obs. } x_n}} + \underbrace{\left|\binom{X \setminus \{x_n\}}{k}\right|}_{\substack{\text{počet } k\text{-prvkových podm.} \\ \text{množiny } X \text{ neobs. } x_n}}$$

Q.E.D.

Pascalův trojúhelník

Ve vrcholu $\triangle$ je 1, okraje jsou lemovány nulami, každý prvek je součtem dvou prvků nad ním.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

Pohled přes kombinační čísla:

$$\begin{matrix} & & & & \binom{0}{0} & & & & \\ & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\ & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\ & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\ \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \end{matrix}$$

neboť $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Binomická věta

Víme:

$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \qquad n \in \mathbb{N}_0,\ x, y \in \mathbb{R}$$

DŮKAZ:

Indukcí podle n:

(1) $n = 0$, $n = 1$

$$(x+y)^0 = \binom{0}{0} x^0 y^0 = 1$$

$$(x+y)^1 = \binom{1}{0} x^0 y^1 + \binom{1}{1} x^1 y^0$$

(2) $n \Rightarrow n+1$

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)^n (x+y) = (x+y) \left(\binom{n}{0} x^0 y^n + \cdots + \binom{n}{n} x^n y^0 \right) =$$

$$= \binom{n}{0} x^1 y^n + \cdots + \binom{n}{n} x^{n+1} y^0 + \binom{n}{0} x^0 y^{n+1} + \cdots + \binom{n}{n} x^n y^1 =$$

$$= \binom{n+1}{0} x^0 y^{n+1} + \binom{n+1}{1} x^1 y^n + \cdots + \binom{n+1}{n} x^n y^1 + \binom{n+1}{n+1} x^{n+1} y^0 =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{(n+1)-k}$$

Důsledek:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

Multinomická věta

$$\forall n \in \mathbb{N}_0, \forall m \in \mathbb{N}, \forall x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}:$$

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{\substack{k_1, k_2, \ldots, k_m \geq 0 \\ k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n}} \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} (x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_m^{k_m})$$

Bez důkazu.

Poznámka:

Pro $m = 2$ odpovídá binomické větě.

Multinomický koeficient

$$\binom{n}{k_1, \ldots, k_m} = \frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_n!}$$

Počet způsobů zařazení čísel $1, \ldots, n$ do m množin $x_1, \ldots, x_m$ tak, aby $|x_1| = k_1, \ldots, |x_m| = k_m$.

Platí

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{k, n-k}$$

Příklad:

200 dětí, 3 autobusy $(80, 70, 50)$, počet možností rozmístění

$$\binom{200}{80, 70, 50}$$

Odhady faktoriálů a kombinačních čísel

Faktoriály

Věta

$$n^{n/2} \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$
$$n^{n/2} = \left(\sqrt{n}\right)^n$$

DŮKAZ:

$$(n!)^2 = \underbrace{(1 \cdot n)(2 \cdot (n-1)) \cdots (n \cdot 1)}_{\substack{\textit{(n! jednou popředu a}\\ \textit{k tomu podruhé odzadu)}}}$$

$$(n!)^2 = z_1 \cdot z_2 \cdots z_{2n}$$

Z AG nerovnosti:

$$z \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

A protože

$$(i+1)(n-i) = n + i(n-1-i) \geq n$$

(pro $i = 0, 1, \cdots, n-1 \Rightarrow (i \geq 0 \wedge (n-1-i) \geq 0)$), platí:

$$z \geq n$$

Tedy:

$$(n^n) \leq (n!)^2 \leq \left(\left(\frac{n+1}{2}\right)^2\right)^n$$

$$n^{n/2} \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

Q.E.D.

Přesněji

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n}$$

$$\text{tj. } \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n}} = 1$$

Bez důkazu.

Kombinační čísla

Můžeme přeformulovat jako odhad prostředního čísla v n-tém řádku Pascalova trojúhelníku.

Víme

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Protože součet je počet podmnožin n-prvkové množiny.
Alternativní výklad: Každá čísla v předcházejícím řádku přispějí $2\times$ do dalšího řádku.

Zřejmě z první definice kombinačního čísla:

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \cdots < \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} > \cdots > \binom{n}{n}$$

$$\frac{2^n}{n+1} < \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} < 2^n$$

Přesněji:

$$\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \approx \frac{2^n}{\sqrt{\pi n/2}}$$

Platí také:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{k} \leq \left(\frac{e \cdot n}{k}\right)^k$$

Bez důkazu. (Ve skriptech, nepovinný.)

Princip inkluze a exkluze (PIE)

Příklad:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$
$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

VĚTA (PIE):

Jsou-li $A_1, A_2, \ldots, A_n$ konečné množiny:

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(-1)^{k+1}}_{(parita)} \cdot \sum_{I \in \binom{\{1,\ldots,n\}}{k}} |\bigcap_{i \in I} A_i|$$

(Ve vnořené sumě sčítáme přes všechny k-prvkové podmnožiny množiny $1..n$.)

DŮKAZ:

Nechť x je libovolný prvek z $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$. Pro $n = 1$, $n = 2$ viz diagramy množin, nakreslit si, kam který prvek přispívá: $+1 - 1 + 1 \cdots$

Kolikrát je počítán x vlevo, kolikrát vpravo? Vlevo jednou — triviální.

Vpravo

Nechť j označuje počet množin A_i, do kterých patří x.

Příklad:

$$x \in A_1, \ldots, A_j$$
$$x \notin A_{j+1}, \ldots, A_n$$

Pak platí:

$$\#x = \binom{j}{1} - \binom{j}{2} + \binom{j}{3} - \cdots + (-1)^{j-1}\binom{j}{j}$$
$$= \sum_{i=1}^{j} (-1)^{i-1} \binom{j}{i} + 1 - 1$$

Obracíme znaménko a paritu:

$$= 1 - \sum_{i=0}^{j} (-1)^i \binom{j}{i}$$
$$= 1 - (-1+1)^j$$
$$= 1$$

Q.E.D.

Příklad:

$$|X| = \{1, \ldots, n\},\ |Y| = \{1, \ldots, l\},\ n \geq l$$

Kolik existuje zobrazení z X **na** Y?

Všech zobrazení z X do Y je l^n. Nechceme počítat ta, ve kterých se na nějaký prvek Y nezobrazuje žádný prvek z X:

$$\exists y \in Y :\ \forall x \in X,\ f(x) \neq y.$$

Pro všechna $i = 1, \dots, l$ platí:

$$A_i = \{j\colon X \to Y \mid \forall x \in X,\ f(x) \neq i\} = \{j\colon X \to Y - \{i\}\}$$
$$|A_i| = (l-1)^n$$

Pro $i_1 \neq i_2$:

$$A_{i_1} \cap A_{i_2} = \{f\colon X \to Y - \{i_1, i_2\}\}$$
$$|A_{i_1} \cap A_{i_2}| = (l-2)^n$$

Pro $\{i_1, \dots, i_k\} \in \binom{\{1,\dots,l\}}{k}$:

$$A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k} = \{f\colon X \to Y - \{i_1, \dots, i_k\}\}$$
$$\{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}\} = (l-k)^n$$

Počet zobrazení z X na Y je:

$$l^n - |\bigcup_{i=1}^{l} A_i| =$$

$$= l^n - \left(\binom{l}{1}(l-1)^n - \binom{l}{2}(l-2)^n + \binom{l}{3}(l-3)^n - \dots + \right.$$

$$\left. +(-1)^{l-2}\binom{l}{l-1}(l-(l-1)^n) + (-1)^{l-1}\binom{l}{l}(l-l)^n \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{l-1} (-1)^k \binom{l}{k}(l-k)^n$$

Vánoční besídka (šatnářka)

n dárců dostane nazpět n dárků. Každá z $n!$ možností je stejně pravděpodobná. Jaká je pravděpodobnost, že nikdo nedostane zpátky svůj dárek?

Matematická formulace

Hledáme $\frac{š(n)}{n!}$, $š(n) =$ počet permutací π množiny $\{1,\dots,n\}$ bez pevného bodu.
Pevný bod: i je pevný bod, pokud $\pi(i) = i$.

VĚTA (Šatnářka):

$$š(n) = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

Příklad:

$$š(1) = 1!\left(1 - \frac{1}{1!}\right) = 0$$

$$š(2) = 2!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\right) = 1$$

$$š(3) = 3!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) = 2$$

DŮKAZ:

$$S_n = \text{ množina všech permutací } \{1,\dots,n\}$$

$$A_i = \{\pi \in S_n, i = 1,\dots,n:\ \pi(i) = i\}$$

$$|A_i| = (n-1)! \ \textit{(Prvek i stojí, ostatní se propermutují.)}$$

Pro $I = \{i_1,\dots,i_k\} \subseteq \{1,\dots,n\}$ platí:

$$\underbrace{\bigcap_{i\in I} A_i}_{A_{i_1}\cap\dots\cap A_{i_k}} = \text{ množina vsech permutací } \pi$$

množiny $\{1,\dots,n\}$ takových, že $\pi(i_1) = i_1,\dots,\pi(i_k) = i_k$.

$$|\bigcap_{i\in I} A_i| = (n-k)! \ \textit{(t prvků stojí, ostatní se propermutují.)}$$

$$š(n) = |S_n| - |\bigcup_{i=1}^{n} A_i| =$$

$$= n! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot \sum_{I\in\binom{\{1,\dots,n\}}{k}} \underbrace{|\bigcap_{i\in I} A_i|}_{(n-k)!}$$

$$= n! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot \underbrace{\binom{n}{k}(n-k)!}_{\frac{n!}{k!}}$$

$$= n! \cdot \left(1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!}\right)$$

Q.E.D.

Tedy **pravděpodobnost**, že nikdo nedostane zpět svůj dárek, je:

$$\frac{\text{š}(n)}{n!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots \pm \frac{1}{n!} \to \frac{1}{e} \approx 0.36787\ldots$$

Grafy

Definice

Graf G je uspořádaná dvojice (V, E), kde V je libovolná konečná množina (obecněji zcela libovolná) a $E \subseteq \binom{V}{2}$.

Úplný graf (na n vrcholech):

$$K_n = (V, \binom{V}{2})$$

Kružnice:

$$C_n = (\{v_1, \ldots, v_n\}, \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}\}) \qquad n \geq 3$$

Cesta:

$$P_n = (\{v_0, \ldots, v_n\}, \{\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \ldots, \{v_{n-1}, v_n\}\})$$

Sled: $v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_m, v_m$, kde $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$. (Cesta je tedy speciální druh sledu, kde jedním vrcholem neprojdeme vícekrát.)

Úplný bipartitní graf $K_{n,m} = (V, E)$

$$V = \{u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_m\}$$
$$E = \{\{u_i, v_j\} : \ i = 1, \ldots, n; \ j = 1, \ldots, m\}$$
$$|V| = n + m, \ |E| = n \cdot m$$

Příklad:

$K_{2,3}$:

```
*-\ * /-*
 \ X X /
  *-^-*
```

Bipartitní graf

Graf $G = (V, E)$ takový, že:

$$V = \underbrace{U \dot\cup W}_{\substack{V = U \cup W, \\ U \cap W = 0}}$$
$$E \subseteq \{\{u, w\} : \ u \in U, \ w \in W\}$$

Isomorfismus

"Přejmenování vrcholů"

$G \mid G'$ (G, G' jsou **izomorfní**), pokud existuje bijekce $f \colon V(G) \xleftrightarrow{1\text{–}1} V(G')$ taková, že:

$$\{x, y\} \in E(G) \Leftrightarrow \{f(x), f(y)\} \in E(G')$$

Pozn.: Izomorfismus je ekvivalence (reflexivní, symetrická, tranzitivní).

Podgraf: Graf G' je **podgrafem** grafu G ($G' \subseteq G$), pokud $V(G') \subseteq V(G)$ a $E(G') \subseteq E(G)$.

Indukovaný podgraf

Graf G' je **indukovaným podgrafem** grafu G, pokud $V(G') \subseteq V(G)$ a $E(G') = E(G) \cap \binom{V(G')}{2}$.

Pozorování

Graf G na n vrcholech má 2^n indukovaných podgrafů (každá podmnožina V **indukuje** indukovaný podgraf).

Souvislý graf

Graf G je **souvislý**, pokud $\forall x, y \in V(G)$ existuje v G cesta z x do y: $x \sim_G y$. $\sim_G$ je ekvivalence na množině $V(G)$.

DŮKAZ:

Reflexivita a symetrie je zřejmá.
Tranzitivita:

$$x \sim_G y \wedge y \sim_G z \Rightarrow \exists \text{ sled z } x \text{ do } z$$

Nejkratší sled z x do z je cesta $\Rightarrow x \sim_G z$.
Q.E.D.

Poznámka:

$$G \text{ souvislý } \Leftrightarrow \forall x, y \in V(G)\ \exists \text{ sled z } x \text{ do } y \text{ (v } G)$$

Komponenta grafu G

Podgraf indukovaný třídami ekvivalence $\sim_G$.
Pozn.: G souvislý $\Leftrightarrow$ má jednu komponentu.

Vzdálenost v grafu

$$x, y \in V(G),\ d_G(x, y) = \text{ vzdálenost } x,\ y \text{ v } G\ = \text{ délka nejkratší cesty z } x \text{ do } y$$

Poznámka:

$d_G(x, y)$ má vlastnosti metriky (vzdálenosti):

$$d_G(x, y) \geq 0$$
$$d_G(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$
$$d_G(x, y) = d_G(y, x)$$
$$d_G(x, y) + d_G(y, z) \geq d_G(x, z)$$

Sousedi v grafu: y je soused x v G, pokud $\{x, y\} \in E(G)$ ($\Leftrightarrow d_G(x, y) = 1$).
Matice sousednosti:

$$G = (\{v_1, \dots, v_n\}, E):\ A_G = (a_{i,j})_{i,j=1}^n,\ a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \{v_i, v_j\} \in E(G) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Stupeň vrcholu: Stupeň vrcholu x v G jest $\deg_G(x) = \deg(x) =$ počet hran obsahujících $x =$ počet sousedů.

Věta o sudosti (princip sudosti)

$$\forall G = (V, E): \sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2|E|$$

DŮKAZ:

Vlevo každá hrana přispěje 2×.
Q.E.D.

Důsledek:

$\forall G$: počet vrcholu každého stupně je sudý.

Poznámka:

Neplatí pro nekonečné grafy (o-o-o-o-$\cdots$).

```
    o
  /   \
o ----- o ----- o ----- o
```

Skóre grafu

$G = (\{v_1, \ldots, v_n\}, E)$, **skóre grafu G** $= D(G) = (\deg_G(v_1), \ldots, \deg_G(v_n))$

Dvě skóre považujeme za stejná, pokud se liší pouze pořadím prvků.

Příklad:

```
    o
  /   \
o ----- o ----- o ----- o
```

má skóre $(1, 2, 2, 2, 3)$.

```
    o
  /   \
o - o - o - o
```

k němu není izomorfní.

Věta o skóre:

$$D = (d_1, \ldots, d_n,\ 0 \leq d_1 \leq \cdots \leq d_n)$$

D je skóre nějakého grafu, právě když

$$D' = (d_1, \ldots, d_{n-d_n-1}, d_{n-d_n} - 1, \ldots, d_{n-2} - 1, d_{n-1} - 1)$$

je skóre nějakého grafu.

Příklady použití:

Je $(1, 2, 3, 3, 3, 4, 4)$ skóre nějakého grafu?
$(1, 2, 2, 2, 2, 3)$ skóre nějakého grafu?

$$(1,2,1,1,1)$$

$$(1,1,1,1,2)$$

$$(1,1,0,0) \Leftrightarrow (0,0,1,1)$$

$$(0,0,0)$$

je skóre grafu.

Je $(1,1,1,2)$?

$$(1,0,0)$$

$$(0,0,1)$$

$$(0,-1)$$

není.

Je $(0,1,2,3,4,4)$?

$$(0,0,1,2,3)$$

$$(0,-1,0,1)$$

DŮKAZ:

"$\Leftarrow$"

G' má skóre D'. Přidáme ke G' nový vrchol v_n a spojíme ho hranou s vrcholy v_{n-1}, v_{n-2}, …, v_{n-d_n}. Dostáváme tak graf se skóre D.

"$\Rightarrow$"

Předpokládáme, že $G = (\{v_1, \ldots, v_n\}, E)$ má skóre D. Označme $d = d_n = \deg v_n$.

První případ: Z v_n vedou hrany do vrcholů $v_{n-1}, v_{n-2}, \ldots, v_{n-d}$. Odstraněním v_n pak z těchto hran dostaneme graf se skóre D'.

Druhý případ: Neplatí první případ, tedy potom je vrchol v_n propojen s jinými vrcholy, než je posledních d_n, neboli:

$$i < n - d \leq j : \ \{v_i, v_n\} \in E, \ \{v_j, v_n\} \notin E$$

Ale protože $\deg v_i \ (= d_i) \leq \deg v_j \ (= d_j)$, existuje v_k ($k \neq i, j$) takový, že $\{v_j, v_k\} \in E$, $\{v_i, v_k\} \notin E$ (tedy existuje zase nějaký vrchol v_k takový, který je spojený s v_j, ale ne v_k a tím se stupeň kompenzuje).

Přidáme do E hrany $\{v_i, v_k\}, \{v_j, v_n\}$, odebereme z E hrany $\{v_i, v_n\}, \{v_j, v_k\}$. Skóre tak zůstává D, ale zmizela neposedná hrana mimo posledních d_n prvků (vrcholy v_i, v_j jsme místo přes v_n spojili přes v_k). Převedli jsme tedy situaci na první případ.

Q.E.D.

Kreslení grafu jedním tahem

Sled: $v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_n, v_n$; $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$
Tah: Sled, $e_i \neq e_j$ (pro $i \neq j$)
Uzavřený tah: Tah, $v_0 = v_m$
"Cesta": Tah, $v_i \neq v_j$

Eulerovský graf

$G = (V, E)$ je **Eulerovský** (lze nakreslit jedním uzavřeným tahem), pokud existuje uzavřený tah $v_0, e_1, \ldots, e_m, v_m$ takový, že:

$$\forall e \in E \ \exists! \, i: \ e = e_i \ \wedge \ \forall v \in V \ \exists \, i: \ v = v_i$$

VĚTA ():

G je eulerovský graf, právě když je G souvislý a všechny stupně jsou sudé.

DŮKAZ:

"$\Rightarrow$"

Uzavřený eulerovský tah dává **souvislost** (mezi každými 2 vrcholy existuje tah, tedy i sled) i **sudé stupně** ($\deg v = 2|\{i \in \{1, \ldots, m\} : \ v = v_i\}|$).

"$\Leftarrow$"

Pozorování: Pokud jsou všechny stupně sudé, každou hranou vede uzavřený tah.
Důkaz: Nejdelší tah danou hranou je nutně uzavřený. *Q.E.D.*
$G = (V, E)$ souvislý, všechny stupně sudé. Ukážeme (sporem), že nejdelší uzavřený tah T v G je eulerovský.
Co by bylo, kdyby nebyl: Ze souvislosti víme, že existuje $v \in V(T)$, $e \in E \setminus E(T)$, $v \in e$. V grafu $G' = (V, E \setminus E(T))$ jsou všechny stupně sudé, tedy v G' existuje uzavřený tah T', obsahující e.
Ve vrcholu v propojíme T, T' do jednoho tahu. Schematicky: **T-O-D-O:** Fig. D0
$\Rightarrow$ nový delší tah, ale T měl být nejdelší!
$\not\sharp$ *Spor*

Operace (lokální úpravy) na grafech

Definujeme si $G = (V, E)$.

(i) Odebrání hrany $e \in E$: $G \to G - e = (V, E \setminus \{e\})$.

(ii) Přidání hrany $e \in \binom{V}{2} \setminus E$: $G \to G + e = (V, E \cup \{e\})$.

(iii) Odebrání vrcholu $v \in V$: $G \to G - v = (V \setminus \{u\}, \{e \in E, v \notin e\})$.

(iv) Dělení hrany $e = \{x, y\} \in E$:

$$G \to G \,\%\, e = (V \cup \{z\}, (E \setminus \{e\}) \cup \{\{x, z\}, \{y, z\}\})$$

G' **je dělení grafu** G**, pokud:** G' dostaneme z G postupným opakováním operace dělení hrany. Ekvivalentně — G' dostaneme z G nahrazením hran cestami délek ≥ 1.

Příklad:

```
o ------ o      o ----- o
| \             | \
|   \      ---> o    o
|      \        |      \
o        o      o        o
```

2–souvislost

Definice:

Graf $G = (V, E)$ je **(vrcholově) 2–souvislý**, pokud $|V| \geq 3$ a $G - v$ je souvislý pro $\forall v \in V$.

Příklad:

```
o - o
|     > o   2--souvislý
o - o
```

```
  o   o
 / \ / \
o   o   o   není 2--souvislý (ale je hranově 2--souvislý)
 \ / \ /
  o   o
```

Pozorování:

$$G \text{ je 2–souvislý} \Rightarrow \begin{cases} G + e & \text{2–souvislý pro } \forall e \notin E. \\ G - e & \text{souvislý pro } \forall e \in E. \\ G \% e & \text{2–souvislý pro } \forall e \in E. \end{cases}$$

DŮKAZ:

(a) zřejmé

(b) $e = \{x, y\} \in E$
$G - x$ souvislý $\Rightarrow$ y je v $G - e$ v jedné komponentě se všemi vrcholy $v \neq x, y$.
$G - y$ souvislý $\Rightarrow$ x je v $G - e$ v jedné komponentě se všemi vrcholy $v \neq x, y$.
Tedy $G - e$ má určitě jednu komponentu, takže je souvislý.

(c)

```
       e
 x ----- y  -->  x - z - y
.
       G               G'
```

$G' - v$ souvislý $\forall v \neq z$. $G' - z = G - e$ souvislý podle (b).

Q.E.D.

Definice:

Grafy $G = (V, E)$ je **hranově 2–souvislý**, pokud G je souvislý a $G - e$ je souvislý pro $\forall e \in E$.

VĚTA ():

G je 2–souvislý $\Leftrightarrow$ G vznikne z $K_3 = \triangle$ postupným přidáváním a dělením hran.
T-O-D-O: Obrázek úplného trojúhelníčku s vrcholem uprostřed a jeho odvození z trojúhelníčku.

DŮKAZ:

"$\Rightarrow$"

$\triangle$ je 2–souvislý, přidávání a dělení hran uchovává 2–souvislost.

"$\Leftarrow$"

Nebudeme dělat.

Q.E.D.

VĚTA ():

V 2–souvislém grafu leží každé 2 vrcholy na společné kružnici.

DŮKAZ:

Podle předchozí věty stačí dokázat:

(i) Věta platí pro $\triangle$. Triviální.

(ii) Věta platí pro $G \Rightarrow$ platí i pro $G + e$ (triviální).

(iii) Věta platí pro $G \Rightarrow$ platí i pro $G \,\%\, e$:
Nechť $u \in V(G)$, $z \in V(G') \setminus V(G)$ (vytvořený na $e = (x, y)$). Leží u, z na společné kružnici? (Ostatní případy jsou triviální.)
C = kružnice v G společná pro x, u.

- **(1)** $y \in C$ — **T-O-D-O:** Obrázek D1
- **(2)** $y \notin C$ — **T-O-D-O:** Obrázek D2
  P = nejkratší cesta z y do $V(C)$ v $G - x$. Pak nová kružnice vede z x přes z do y, pak po P až k nějakému vrcholu C a poté po C až zpět k x.

Poznámka:

V 2–souvislém grafu též každé 2 hrany leží na společné kružnici. (Bez důkazu).

Stromy

Strom: Souvislý graf bez kružnic.
List: Vrchol stupně 1.

LEMMA:

Každý strom s alespoň 2 vrcholy má alespoň 2 listy.

DŮKAZ:

Koncové vrcholy nejdelší cesty jsou listy:

```
o - o - o - o - o - o - o - o - o - o
       /   /|  / \     /
      o   o o o   o   o
                      |
                      o
```

Pokud by nebyly listy, existovala by hrana vedoucí do jiného vrcholu na cestě (ale pak by to byl cyklus), nebo do nového vrcholu, ale pak by původní graf nebyl souvislý.

Pozorování:

G graf, $v \in V(G)$ list. Pak:

$$G \text{ strom } \Leftrightarrow G - v \text{ strom}$$

DŮKAZ:

$$G \text{ souvislý } \Leftrightarrow G - v \text{ souvislý}$$

(zřejmé)

$$G \text{ má kružnici } \Leftrightarrow G - v \text{ má kružnici}$$

(kružnice obsahuje samé vrcholy stupně alespoň 2)
Q.E.D.

Důsledek:
G strom ($|V(G)| \geq 1$) $\Longleftrightarrow$ z G dostaneme $K_1 = \bullet$ postupným odebíráním bodů.

VĚTA ():

Nechť $G = (V, E)$ je graf. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) G je strom
(ii) $\forall x, y \in V$: existuje právě jedna cesta z x do y
(iii) G je souvislý, ale $G - e$ není souvislý pro $\forall e \in E$
(iv) G nemá kružnici a $G + e$ má kružnici pro $\forall e \in \binom{V}{2} \setminus E$
(v) G je souvislý a $|V| = |E| + 1$

DŮKAZ:

(i) $\Rightarrow$ **(ii)**

$$G \text{ souvislý } \Longrightarrow \text{ existuje cesta z } x \text{ do } y$$

$$G \text{ bez kružnic } \Longrightarrow \text{ neexistují 2 cesty z } x \text{ do } y$$

Předpokládám P_1, P_2 různé cesty z x do y:

$$P_1 = xe_1v_1e_2v_2 \cdots y$$
$$P_2 = xe'_1v'_1e'_2v'_2 \cdots y$$

Nechť i je minimální, pro které platí $e_i \neq e'_i$.
Nechť $j \geq i$ je minimální, pro které $\exists\, k$ takové, že $v'_j = v_k$.
Pak $v_{i-1} = v'_{i-1}, v'_i, \ldots, v'_j = v_k, v_{k-1}, \ldots, v_i$ tvoří kružnici.
$\lightning$ *Spor*

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

$e = \{x, y\}$
$G - e$ není souvislý, jinak by existovaly dvě cesty z x do y (jedna v $G - e$, druhá e).

(iii) $\Rightarrow$ (iv)

Tvrdíme, že G nemá kružnici. Pro spor tedy předpokládejme, že kružnici má. Potom vynecháním libovolné hrany kružnice se neporuší souvislost. To je ale spor s (iii).

$G + e$ ($e = \{x, y\}$) má kružnici: G je souvislý, tedy existuje cesta z x do y v G a přímá hrana dotvoří kružnici.

(iv) $\Rightarrow$ (i)

G souvislý: $x, y \in V$, existuje cesta z x do y v G?

(a) $\{x, y\} \in E$: platí

(b) $\{x, y\} \notin E$: $G + \{x, y\}$ má kružnici, která nebyla v G, tedy nutně prochází hranou $\{x, y\}$. Ostatní hrany kružnice tvoří cestu z x do y v G.

(i) $\Rightarrow$ (v)

$|V| = |E| + 1$: z předchozího důsledku.
Odebráním listu odebereme právě jednu hranu, platnost rovnice se tedy nemění. Opakováním dostaneme jednovrcholový strom $K_1 = \bullet$, pro ten rovnice platí.

(v) $\Rightarrow$ (i)

$G = (V, E)$ souvislý, $|V| = |E| + 1$.
G nemá kružnici: nechť G má kružnici; odebereme jednu její hranu, neporušíme souvislost. Má-li stále ještě nějakou kružnici, opět z ní odebereme hranu. To opakujeme, až dostaneme graf $G' = (V, E')$ souvislý bez kružnic (tedy strom $|V| = |E'| + 1$), $|E'| < |E|$. Ale předpoklad zněl, že $|V| = |E| + 1$.
$\lightning$ *Spor*

Minimální kostra grafu

Kostra grafu

Kostra souvislého grafu $G = (V, E)$ je libovolný strom $T = (V, E')$, kde $E' \leq E$.

Poznámka:

Každý souvislý graf má kostru: dokud v G existuje kružnice, odebíráme z G hranu kružnice, dostaneme tak nakonec kostru grafu.

Příklad:

Prasátko. (Na onom grafu se vysvětluje i minimální kostra.)

Graf s ohodnocenými hranami: $G = (V, E), w\colon E \to \mathbb{R}^+$.

Problém minimální kostry:

Pro daný souvislý graf $G = (V, E), w\colon E \to \mathbb{R}^+$ máme nalézt **minimální kostru**, tj. kostru $K = (V, E')$ takovou, že její váha $w(K) = w(E') = \sum_{e \in E'} w(e)$ je minimální.

Kruskulův (hladový) algoritmus

Mějme souvislý $G = (V, E), w\colon E \to \mathbb{R}^+$. Předpokládejme, že $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, přičemž

$$w(e_1) \leq w(e_2) \leq \cdots \leq w(e_m)$$

1. $E_0 = \emptyset$

2. Pro $i = 1, 2, \dots, m$ pokládáme

$$E_i = \begin{cases} E_{i-1} \cup \{e_i\} & \text{pokud } (V, E_{i-1} \cup \{e_i\}) \text{ nemá kružnici} \\ E_{i-1} & \text{jinak} \end{cases}$$

3. $(V, E_m) \to$ výstup (minimální kostra)

VĚTA (kostra nalezená algoritmem je minimální):

DŮKAZ:

(V, K) nechť je výsledná kostra. Budiž (V, L) libovolná jiná kostra, pak chceme $w(L) \geq w(K)$. Indukcí podle $\underbrace{d = |K \Delta L| = |(K \setminus L) \cup (L \setminus K)|}_{\text{mohutnost } \textbf{symetrické diference}}$:

$(d = 0)$ $K = L$, platí

$(d > 0)$ Předpokládáme, že tvrzení platí pro všechny menší hodnoty d.

$$d > 0 \Longrightarrow K \neq L,\ |K| = |L| \Longrightarrow \exists\, e \in L \setminus K$$

$(V, L \setminus \{e\})$ pak má dvě komponenty (graf s hranou byl strom). Obrázek.

(V, K) kostra $\Longrightarrow$ $(V, K \cup \{e\})$ má (jedinou) kružnici C obsahující e. Existuje $e' \neq e \in C$:

$$|e' \cap V_1| = 1$$
$$|e' \cup V_2| = 1$$

Tvrdíme:

$$w(e') \leq w(e)$$

(jinak $w(e) < w(e')$, algoritmus tedy uvažoval e dříve než e', ovšem pokud ho nezařadil, mohl ho odmítnout jedině kvůli C (to je jediná kružnice v $K \cup e$), ale $e' \in C$ nebylo ještě uvažováno).

$$L' = (L \setminus \{e\}) \cup \{e'\}$$

Tvrdíme, že (V, L') je kostra. (Viz náš virtuální obrázek. Měli jsme dvě komponenty spojené hranou e, teď je jen spojíme místo toho jinou hranou e'.)

$$|L'\Delta K| < |L\Delta K|$$

$$w(L) \geq w(L') \overset{\text{ind. předp.}}{\geq} w(K)$$

Q.E.D.

Jarníkův algoritmus na minimální kostru

1. $V_0 := \{v\}$, kde v je libovolný vrchol z V.

2. Pro $i = 1, 2, \ldots, n-1$ ($n = |V|$) nechť e_i je hrana minimální váhy vedoucí z V_{i-1} do $V \setminus V_{i-1}$.
Obrázek.
$V_i = V_{i-1} \cup e_i$ (přidáme koncový vrchol hrany e_i).

3. $strom(V, \{e_1, \ldots, e_{n-1}\})$ je výstup (minimální kostra grafu).

Borůvkův algoritmus

Předpokládáme, že libovolné dvě hrany mají různou váhu: $w(e) \neq w(e')$ $\forall e \neq e'$.

1. Spojíme každý vrchol hranou s nejbližším sousedem: (obrázek).

2. Spojme každou komponentu hranou s nejbližší jinou komponentou: (obrázek).
Opakujeme, dokud nedostaneme jednu komponentu — to je výstup.

Rovinné grafy

Oblouk: Množina bodů $\{\gamma(x) : x \in [0,1]\}$, přičemž $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ (rovina) je prosté a spojité zobrazení.

Definice:

Graf $G = (V, E)$ je **rovinný**, má-li **rovinné nakreslení**:
Vrcholy odpovídají různým bodům v $\mathbb{R}^2$, hrany odpovídají obloukům spojujícím příslušné dvojice vrcholů tak, že mají-li dva oblouky společný bod, potom je tento bod pro oba oblouky koncový.

Příklady:

- **(i)** K_4 je rovinný
- **(ii)** C_n je rovinná
- **(iii)** Libovolný strom

Je známo: Každý rovinný graf má rovinné nakreslení, v němž hrany odpovídají úsečkám. (Důkaz těžký.)

Definice:

Stěny rovinného nakreslení: Maximální souvislé oblasti množiny $\mathbb{R}^2 \setminus X$, kde X je množina bodů ležících na obloucích nakreslení. (Souvislost bereme intuitivně.)

Příklad:

Vezmeme-li K_4, pak stěny jsou vlastně všechny oblasti mezi úsečkami i kolem celého grafu (má tedy 4 stěny).

Vnější stěna: Jedna neomezená stěna, která existuje pro každý rovinný graf.
Vnitřní stěny: Ostatní stěny.

Definice:

Topologická kružnice: Uzavřený “oblouk” (tj. $\gamma(0) = \gamma(1)$).

Příklad:

Obrázky. (Šneci a měňavky. ;-)

VĚTA (Jordanova věta o kružnici):

Libovolná topologická kružnice rozděluje rovinu na dvě souvislé oblasti (**vnitřek** a **vnějšek** dané kružnice).
(Důkaz těžký.)

VĚTA (Nerovinnost K_5):

Graf K_5 není rovinný.

DŮKAZ:

Sporem. Nechť $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Obrázek: vezměme si vrcholy 1, 2, 3 a hrany mezi nimi. Ty vytvoří topologickou kružnici K.

- **(a)** v_4 leží uvnitř K:
  Pak ho umístíme do středu, ale pak kam s vrcholem V_5? Žádná stěna nemá na hranici všechny vrcholy 1, 2, 3, 4.
- **(b)** v_4 leží vně K:
  Můžeme převést na isomorfní graf s v_4 uvnitř.

Q.E.D.

VĚTA (Nerovinnost $K_{3,3}$):

Graf $K_{3,3}$ (úplný bipartitní graf o $3+3$ vrcholech) není rovinný.

DŮKAZ:

$V = \{1, 2, 3, 1', 2', 3'\}$
Spousta obrázků.

```
           o 1
          / \
        / 3   \
2' o - -o- - o 1'
        \     /
          \ /
           o 2
```

Kam s $3'$?
Q.E.D.

Pozorování:

G rovinný $\Leftrightarrow$ každé dělení G je rovinné.

DŮKAZ:

Obrázkem K_4. Libovolně rozdělíme hrany, ale tím se nám nijak nezmění rovinnost.

VĚTA (Kuratowski):

G je rovinný $\Leftrightarrow$ G neobsahuje dělení K_5 ani dělení $K_{3,3}$.

DŮKAZ:

“$\Rightarrow$”
Zřejmá.

“$\Leftarrow$”
Těžká.

Q.E.D.

Eulerův vztah

G souvislý rovinný graf, $|V| \geq 1$, $s =$ počet stěn nějakého rovinného nakreslení G. Potom

$$|V| - |E| + s = 2$$

(Tudíž počet stěn nezávisí na volbě nakreslení.)

DŮKAZ:

Indukcí podle $|E|$:

(1) $|E| = 0$: $s = 1$, $|V| = 1$ (kvůli souvislosti), $1 - 0 + 1 = 2$.

(2) $|E| \geq 1$:

(a) G neobsahuje kružnici: G je strom.
Tedy $|V| = |E| + 1$, $s = 1$, tedy platí.

(b) G obsahuje kružnici C:
e buď libovolná hrana na C. $G-e$ splňuje Eulerův vztah (indukční předpoklad), má o hranu a stěnu méně, tedy G splňuje Eulerův vztah.

Q.E.D.

Tvrzení:

G buď rovinný, 2-souvislý. Pak hranice libovolné stěny v libovolném nakreslení G odpovídá kružnici v G.

Příklad:

```
   o---o-.
  / \     o
 /.o.\  / |
o-----o---o

Ale ne:


   o-----o------o--\
   |\    |      | o \
   | o-o |      | |  \
   |     |      | o   \
   o-----o      o------o
```

DŮKAZ:

Stačí ukázat, že tvrzení:

(i) platí pro trojúhelník

(ii) nepřestane platit podrozdělením nebo přidáním hrany

Jednoduše z obrázku.

Tvrzení:

$G = (V, E)$ rovinný graf, $|V| \geq 3$. Potom:

(i) $|E| \leq 3|V| - 6$

(ii) G neobsahuje $\Delta \Rightarrow |E| \leq 2|V| - 4$

DŮKAZ:

(i) Přidáváme hrany, dokud nedostaneme nějaký maximální rovinný graf, pro který platí, že po přidání jakékoliv hrany do něj již získáme graf, který není rovinný. Takový graf určitě bude 2-souvislý.

Souvislý bude, poněvadž kdyby měl více komponent, určitě bychom mohli přidat nějakou hranu, kterou komponenty spojíme, a tím by nebyla narušena rovinnost.

2-souvislý bude, jinak můžeme přidat hranu, která podruhé spojí nějaké dvě komponenty.

Každá stěna odpovídá kružnici, dokonce trojúhelníku: (obrázek) — každou kružnici můžeme rozkouskovat na trojúhelníky tak, že stále budeme mít rovinné zobrazení.

Počet incidentních dvojic hrana—stěna $= 3s = 2|E|$:

$$3s = 2|E|$$

$$3|E| = 3|V| + 3s - 6 \qquad \textit{(Eulerův vzorec)}$$
$$|E| = 3|V| - 6$$

To platí pro každý maximální rovinný graf (rovinná triangulace).

(ii)

Pozor!

Tento důkaz **nefunguje** — proti (a) lze najít triviální protipříklad. Opravy budu konzultovat s doc. Valtrem (asi půjde o moji chybu při přepisování), pokud potřebujete tvrzení umět dokázat teď, zkuste vymyslet důkaz (bez záruky!), jehož idea je:

Využijme (i) — to platí pro maximálně pro triangulovaný graf, odstraňme z něj tedy trojúhelníky. Trojúhelníků je právě tolik co stěn, tedy $2/3|E|$. Vyberme z množiny stěn disjunktní dvojice sousedních trojúhelníků a ty spojme — tím, že odstraníme hrany, které je rozdělují. Zbyde nám polovina stěn, žádná z nich nebude trojúhelník (a rozmysleme si, že každý hustší graf už trojúhelník obsahuje). Polovina znamená $1/3|E|$, odebrali jsme tedy třetinu stěn. To je dle (i) $|V| - 2$, tedy pro náš nový graf bez trojúhelníků $|E| \leq 2|V| - 4$. *Q.E.D.*

Připomínám, že toto je pouze idea, a to bez záruky. Také tento důkaz není proveden dvojím počítáním. Hodí se tedy zejména pro nouzové případy, kdy nevíte, kudy kam ;-).

Následuje původní (rozbitý) důkaz:

(a) Výsledný graf není 2-souvislý: pak to musí být hvězda.
Pokud můžeme přidat hranu, byl nesouvislý a spojili jsme dvě komponenty, tím trojúhelník určitě nevytvoříme. Pokud byl souvislý (ale ne 2-souvislý), každá hrana již nutně vytváří trojúhelník **(nevytváří!)**.
Hvězda:
$$|E| = |V| - 1 \leq 2|V| - 4$$

(b) Výsledný graf je 2-souvislý.
Každá stěna je ohraničena kružnicí délky ≥ 4 Počet incidenčních dvojic hrana—stěna $= 2|E| \geq 4s$:
$$2s \leq |E|$$
$$2|E| = 2|V| + 2s - 4$$
$$|E| \leq 2|V| - 4$$

Důsledky

(1) K_5 ani $K_{3,3}$ nejsou rovinné.

$$K_5: \; z(i) = \; 10 \not\leq 3 \cdot 5 - 6$$
$$K_{3,3}: \; z(i) = \; 9 \not\leq 2 \cdot 6 - 4$$

(2) Každý rovinný graf má alespoň jeden vrchol stupně nejvýše 5.
Sporem: Kdyby všechny vrcholy byly stupně alespoň 6 $\Rightarrow$

$$2|E| = \sum_{v \in V} \deg v \geq 6|V|$$

(spor s (i)).

Barvení map a grafů

Politická mapa (obrázek).
Tři barvy obecně nestačí.

Předpoklady

(1) Každý stát je souvislý.

(2) Státy sousedící pouze v jednotlivých bodech nebudeme považovat za sousední.

Problém čtyř barev

Stačí čtyři barvy na obarvení libovolné politické mapy?
Ano, ale důkaz je extrémně těžký.

Definice:

$G = (V, E)$ lze **(řádně) obarvit** k barvami, pokud existuje zobrazení $b\colon V \to \{1, 2, \ldots, k\}$ takové, že $\{x, y\} \in E \Rightarrow b(x) \neq b(y)$.

Definice:

Barevnost grafu $G = \chi(G) = \min\{k :\ G$ lze obarvit k barvami $\}$.

Příklady:

(i) $\chi(C_{2k}) = 2$

(ii) $\chi(C_{2k+1}) = 3$

(iii) $\chi(K_n) = n$

(iv) $\chi(K_{m,n}) = 2$ $(m, n \geq 1)$

(v) $\chi(T) = 2$ (T strom na ≥ 2 vrcholech)

Vztah mezi barvením map a rovinných grafů

(náznak)
V každém státě vybereme za vrchol hlavní město, pospojujeme hranami hlavní města sousedních států, jistě to lze udělat tak, že graf, který dostaneme, je rovinný.
Řekneme, že mapa je k-obarvitelná $\Leftrightarrow$ rovinný graf je k-obarvitelný.

Problém čtyř barev II.

Jiná formulace:
$\chi(G) \leq 4$ pro každý rovinný graf G?

VĚTA (o pěti barvách):

$\chi(G) \leq 5$ pro každý rovinný graf $G = (V, E)$.

DŮKAZ:

Indukcí podle $|V|$:

(1) $|V| \leq 5$: zřejmé.

(2) $|G|$ rovinný, $|V| \geq 6$ a předpokládáme, že věta platí pro rovinné grafy s menším počtem vrcholů.
G má vrchol x, $\deg x \leq 5$ (Eulerův vztah).

(a) $\deg x \leq 4$: Obarvíme $G - x$ pěti barvami podle indukčního předpokladu, poté dobarvíme x barvou, která se nevyskytuje na jeho sousedech.

(b) $\deg x = 5$: Nechť sousedé jsou označeni $u_1, \ldots, u_5$. G je rovinný, tudíž neobsahuje podgraf K_5 — to ale znamená, že nemůžou být všichni sousedé vzájemně pospojováni hranami. Bez újmy na obecnosti nechť např. $\{u_4, u_5\} \notin E$.

```
* u2    * u5
  \   /
  x * -- * u3
  /   \
* u4    * u1
```

V grafu $G - x$ ztotožníme u_4 a u_5 (tím nám nevznikne žádné křížení):

```
* u2  |__
     //
  u *    * u3
  //
~~|     * u1
```

Podle indukčního předpokladu existuje obarvení b_0 pěti barvami. Obarvení $G - x$ pak můžeme definovat jako:

$$b(v) := b_0(v) \qquad v \neq u_4, u_5$$

$$b(u_4) = b(u_5) := b_0(u)$$

Dobavíme vrchol x barvou různou od $b(u_1)$, $b(u_2)$, $b(u_3)$, $b(u_4) = b(u_5)$.

Q.E.D.

Pozor: Důkaz neprobíhá tak, že vezmu rovinný graf a přidám vrchol. Naopak vezmu libovolný graf, o kterém pouze vím, že libovolný menší graf je rovinný.

Alternativní důkaz:

Indukcí podle $|V|$:

(1) $|V| \leq 5$: zřejmé.

(2) $|V| \geq 6$: Nechť v je vrchol nejmenšího stupně. Dle Eulerova formule $\Rightarrow \deg v \leq 5$. $G - v$ lze obarvit pěti barvami (dle ind. předpokladu).

```
* a     * c
  \   /
  v * -- * b
  /   \
* e    * d
```

Vrchol v vyhodíme:

```
* a     * c

         * b

* e    * d
```

Bez újmy na obecnosti: a, b, c, d, e mají různou barvu.

$$\begin{aligned} f(a) &= \text{modrá} \\ f(b) &= \text{červená} \\ f(c) &= \text{žlutá} \\ f(d) &= \text{zelená} \end{aligned}$$

Neexistuje žluto–zelená cesta z c do d nebo neexistuje modro–červená cesta z a do b.

Pokud by existovaly, musely by se křížit — buď mimo vrchol (to nesmějí) nebo ve vrcholu (ale jak ho pak obarvit?).

Bez újmy na obecnosti nechť neexistuje cesta $c \sim d$.

Přebarvíme barvy v žluto–zelené komponentě obsahující d (prohodíme žlutou a zelenou). I toto obarvení je korektní, neboť komponenta je maximální a její sousedé mají všichni jiné barvy.

Teď má ale c a d stejnou barvu, takže v můžeme obarvit barvou nevyskytující se na sousedech.

⟨písnička⟩
Q.E.D.

Počítání dvěma způsoby

Princip sudosti

$$\forall G = (V, E): \sum_{v \in V} \deg v = 2|E|$$

DŮKAZ:

Dvojím způsobem spočítáme počet dvojic (v, e), kde $v \in V$, $e \in E$, $v \in e$. — jednou podle vrcholů a pak podle hran.

$$\sum_{v \in V} \deg v = \underbrace{\sum_{e \in E} 2}_{2|E|}$$

Q.E.D.

Nezávislý systém množin

Definice:

Mějme množinu X, $M \subseteq P(x)$ nazýváme **nezávislý systém množin**, pokud

$$\forall A, B \in M: \ A \neq B \Rightarrow A \not\subseteq B$$

VĚTA (Spernerova):

X buď množina velikosti n. Potom maximální velikost nezávislého systému množin $\mathbb{M} \subseteq P(x)$ je rovna $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ (např. v Pascalově $\triangle$ je to v řádku, jehož součet je 2^n, největší číslo).

Příklady:

(i) $n = 3$:

$$X = \{1, 2, 3\}$$
$$M_1 = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$$
$$M_2 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$$

jsou nezávislé systémy množin velikosti

$$\binom{3}{1} = 3$$

(ii) obecné n:
$M :=$ množina $\lfloor n/2 \rfloor$-prvkových podmnožin množiny $X = \{1, 2, \dots, n\}$. Pak M bude nezávislý systém velikosti $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

DŮKAZ:

(1) Maximální velikost $\geq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$: z předchozího příkladu.

(2) Maximální velikost $\leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$:
X, M podle předpokladů.
Maximální řetězec: $R = \{0, \{x_1\}, \{x_1, x_2\}, \dots, \underbrace{\{x_1, x_2, \dots, x_n\}}_{X}\}$ kde $x_1, \dots,$ x_n je libovolná permutace prvků X. Maximálních řetězců je $n!$, navíc kdykoliv si

vezmeme libovolné dvě množiny z maximálního řetězce, jedna bude vždy podmnožinou druhé.

Spočítáme dvěma způsoby počet dvojic $(R, \mathcal{M})$ takových, že $\mathcal{M} \in R$. R buď maximální řetězec, $\mathcal{M}$ pak množina z M.

Tento počet je:

(a) $\leq$ (#maximálních řetězců) $= n!$
Kdyby do jednoho R patřily dvě $\mathcal{M}$, nepatřily by obě do nezávislého systému množin.

(b) $= \sum_{\mathcal{M} \in M} \underbrace{|\mathcal{M}|!(n-|\mathcal{M}|)!}_{\substack{\#\text{ max. řetězců} \\ \text{obsahujících } \mathcal{M}}}$.

Tedy:

$$n! \geq \sum_{\mathcal{M} \in M} |\mathcal{M}|!(n-|\mathcal{M}|)!$$

$$1 \geq \sum_{\mathcal{M} \in M} \frac{|\mathcal{M}|!(n-|\mathcal{M}|)!}{n!} = \sum_{\mathcal{M} \in M} \frac{1}{\binom{n}{|\mathcal{M}|}} \geq \sum_{\mathcal{M} \in M} \frac{1}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} = |M| \frac{1}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}$$

$$|M| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

Q.E.D.

Grafy bez $K_{2,2}$ (C_4)

VĚTA (o počtu hran na n vrcholech):

Nechť $G = (V, E)$ je graf na n vrcholech neobsahující $K_{2,2}$. Potom

$$|E| \leq \frac{n\sqrt{n} + n}{2}$$

DŮKAZ:

Využijeme **Cauchy-Schwarzovu nerovnost**:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

pro libovolné $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$.

Počítáme dvěma způsoby počet podgrafů (cest) `u - v - u'`. Tento počet je:

(a) $\leq \binom{n}{2}$: pro $\forall u, u' \in V$, $u \neq u'$ existuje nejvýše jeden $v \in V$ takový, že $\{u, v\}, \{u', v\} \in E$ — jinak dostaneme $K_{2,2}$:

```
*-* u
 X
*-* u'
```

(b) $= \sum_{v \in V} \binom{\deg v}{2}$: pro $\forall v \in V$ máme právě $\binom{\deg v}{2}$ vidliček `* - v - *`.

Tedy:

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in V}\binom{\deg v}{2} &\leq \binom{n}{2} &&\leq \frac{1}{2}n^2\\
\frac{1}{2}\sum_{n\in V}((\deg v)-1)^2 &\leq \sum_{v\in V}\binom{\deg v}{2} &&\leq \frac{1}{2}n^2\\
\underbrace{\sum_{v\in V}((\deg v)-1)\cdot 1}_{2|E|-n} &\leq \underbrace{\sqrt{\sum_{v\in V}((\deg v)-1)^2}}_{\leq\sqrt{n^2}}\cdot\underbrace{\sqrt{\sum_{v\in V}1^2}}_{\sqrt{n}} &&\leq n\sqrt{n}
\end{aligned}$$

$$|E| \leq \frac{1}{2}(n\sqrt{n}+n)$$

Q.E.D.

Orientované grafy

Orientovaný graf: $\overrightarrow{G} = (V, \overrightarrow{E})$, kde V je libovolná konečná množina a $\overrightarrow{E} \subseteq V \times V$.

Definice:

$\deg^+ v$ = vstupní stupeň v = počet hran vedoucích do v.
$\deg^- v$ = výstupní stupeň v = počet hran vedoucích z v.

Příklad:

$$\overrightarrow{G} = (\{a,b,c\}, \{(a,b),(b,b),(a,c),(c,a)\})$$

```
     <\
   _ *-/
   /| b
  /
a /
* -----> * c
 <-----
```

$$\deg^+ a = 1 \qquad \deg^+ b = 2$$
$$\deg^- a = 2 \qquad \deg^- b = 1$$

Definice:

$\overrightarrow{G}$ je **slabě souvislý**, pokud $\forall x, y \in V$ existuje (neorientovaná) cesta z x do y.

$$x\bullet \to \bullet \leftarrow \bullet \to \bullet \leftarrow \bullet y$$

$\overrightarrow{G}$ je **slabě souvislý**, pokud $\forall x, y \in V$ existuje orientovaná cesta z x do y.

$$x\bullet \to \bullet \to \bullet \to \bullet \to \bullet y$$

Definice:

Orientovaný graf $\overrightarrow{G}$ je **eulerovský**, pokud lze nakreslit jedním uzavřeným orientovaným tahem.

$$\cdots \to \bullet \to \bullet \to \cdots$$

VĚTA (podmínka eulerovského grafu):

$\overrightarrow{G} = (V, \overrightarrow{E})$ je eulerovský $\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{G}$ je slabě souvislý a $\underbrace{\forall v \in V : \deg^+ v = \deg^- v}_{(*)}$.

DŮKAZ:

“$\Rightarrow$”

Zřejmé.

“$\Leftarrow$”

LEMMA:

Každou hranou grafu splňujícího $(*)$ vede uzavřený orientovaný tah.

DŮKAZ:

Nejdelší orientovaný tah danou hranou je uzavřený. Když ho totiž vedeme, postupně umazáváme hrany a nakonec nám podle rovnosti v (∗) zbyde jen poslední hrana, která vede do v.

Q.E.D.

Nejdelší uzavřený orientovaný tah v $\overrightarrow{G}$ je eulerovský. Jinak (obdobně jako v neorientovaném případě, schematicky):

```
 /<-\
|    * nejdelší uzavřený orientovaný tah
 \->/
```

Po použití lemmatu a odstranění hran tahu bychom však našli ještě další jiný uzavřený orientovaný tah, díky souvislosti má alespoň jeden společný vrchol. Pak ale můžeme oba tahy propojit do jednoho delšího uzavřeného tahu.

$\lightning$ *Spor*

Počet koster K_n

VĚTA (Cayleyho formule):

$\forall n \geq 2$: počet koster grafu K_n je n^{n-2} (tedy počet stromů na $\{1, \dots, n\}$).

Příklad:

$n = 2$: $\underset{1}{\bullet} - \underset{2}{\bullet}$
$2^0 = 1$ kostra.
$n = 3$: $\underset{1}{\bullet} - \underset{2}{\bullet} - \underset{3}{\bullet}$, $\underset{2}{\bullet} - \underset{1}{\bullet} - \underset{3}{\bullet}$, $\underset{1}{\bullet} - \underset{3}{\bullet} - \underset{2}{\bullet}$
$3^1 = 3$ kostry.
$n = 4$: 12 koster typu housenka, 4 kostry typu vějíř.

DŮKAZ:

Slunce: Strom, v němž všechny hrany jsou zorientovány směrem od jediného vrcholu (středu slunce).

Pozorování 1:

Počet stromů na $\{1, \dots, n\}$ je roven

$$\frac{\text{počtu sluncí na } \{1, \dots, n\}}{n}$$

DŮKAZ:

Každý strom odpovídá n sluncím (máme v každém stromu n možností volby středu). *Q.E.D.*

Sousluní: Orientovaný graf, kde každá komponenta je slunce.

Pozorování 2:

Po odstranění libovolných k hran ze slunce dostaneme sousluní s $k+1$ komponentami (slunci).

DŮKAZ:

Zřejmý z obrázku. Vyhozením hrany ze slunce se slunce rozpadne na 2 další slunce. *Q.E.D.*

Pozorování 3:

Přidáním orientované hrany do sousluní dostaneme opěr sousluní, právě když přidaná hrana vede do středu libovolné jiné komponenty (slunce).

DŮKAZ:

Z obrázku.

Důkaz věty:

Z grafu izolovaných vrcholů 1,…,n dostaneme slunce na $\{1, \dots, n\}$ postupným přidáváním $n-1$ orientovaných hran právě, když přidaná hrana vždy vede z libovolného vrcholu do středu jiné komponenty.

Máme $n(n-1)$ možností volby první hrany. Možností volby druhé hrany máme $n(n-2)$. Pro třetí hranu máme $n(n-3)$ možností. … Pro $(n-1)$. hranu máme $n \cdot 1$ možností.

Celkem máme $n^{n-1}(n-1)!$ možností, jak zvolit 1. až $(n-1)$. hranu. Každé slunce dostaneme $(n-1)!$-krát. Sluncí tedy dostaneme n^{n-1} a stromů tak bude n^{n-2}.

Q.E.D.