

Vzorové riešené príklady diferenciálnych rovníc pre aplikovaných informatikov k písomke 23.5.2006

Príklad č.0 Nájdite všeobecné riešenie rovnice

$$y' = \arccos x$$

Riešenie: Priama integrácia rovnice podľa x . Dostaneme $y = \int \arccos x dx$ a s využitím $(\arccos x)' = 1/\sqrt{1-x^2}$ spravíme per partes $\int 1 \cdot \arccos x dx = x \arccos x - \int x/\sqrt{1-x^2} dx = x \arccos x + \sqrt{1-x^2} + c$, kde posledný integrál sa počíta substitúciou $\sqrt{1-x^2}$. Takže všeobecné riešenie je:

$$y = x \arccos x + \sqrt{1-x^2} + c$$

Príklad č.1 Nájdite všeobecné riešenie rovnice

$$y'xy = 1$$

Riešenie: Vyjadrením $y' = 1/xy$ si nepomôžeme, lebo keďže na pravej strane nám vystúpi neznáma funkcia y , nevieme ju zintegrovat podľa x ako v minulom príklade. Ale pomôže metóda separácie premenných. Keď na ľavú stranu nahádzeme členy čo obsahujú iba y , na pravú čo obsahujú iba x , dostaneme $y'y = 1/x$. Ak sa toto pokúsime zintegrovat podľa x , dostaneme $\int y'y dx = \int 1/x dx = \ln|x| + c$. Na ľavej strane nám síce vystupuje integrál neznámej funkcie y , ale vieme ho vyriešiť, a to substitúciou tou neznámou funkciou y , lebo $\int yy' dx = \int y dy = y^2/2 + c$. Druhýkrát sa nám objavilo písmeno c označujúce integračnú konštantu. Keď si ho prehodíme na pravú stranu a rovnicu prenásobíme 2 a odmocníme, dostaneme riešenie:

$$y = \pm \sqrt{2(\ln|x| + c)}$$

Poznámka: Ak má niekto problémy s počítaním s integračnými konštantami, konkrétne ak sa mu pri prehadzovaní na druhú stranu vykrátily, odporúča sa označovať si každú integračnú konštantu inak. Napríklad $\int 1/x dx = \ln|x| + c_x$, $\int y dy = y^2/2 + c_y$ a výsledok potom bude platiť pre $c = c_x - c_y$.

Príklad č.2 Nájdite riešenie rovnice

$$y' = e^{(x-y)}$$

pri počiatkovej podmienke

$$y(0) = 1$$

Riešenie: Keďže vlastne v oboch predchádzajúcich príkladoch sme integrovali rovnicu čo bola v separovanom tvare, na ľavej strane iba veci od y , na pravej iba od x , začneme aj teraz úpravou na tvar $y'e^y = e^x$ zintegrovaním rovnice podľa x dostávame $\int e^y y' dx = \int e^y dy = e^y + c = e^x + c$, odkiaľ si vyjadríme $y = \ln(e^x + c)$ a máme všeobecné riešenie. Aby riešenie vyhovovalo počiatkovej podmienke, musí platiť pre $x = 0$ a $y = 1$, tak to dosadíme, dostaneme $1 = \ln(e^0 + c) = \ln(1 + c)$. Odtiaľ si vyjadríme $c = e - 1$, a preto riešenie rovnice spĺňajúce počiatkovú podmienku je:

$$y = \ln(e^x + e - 1)$$

Príklad č.3 Nájdite všeobecné riešenie rovnice

$$y' + 4y = \cos x$$

Tu už so separáciou premenných nepochodíme, lebo finta so substitúciou y funguje iba vtedy keď máme integrál z nejakej funkcie y prenášobenej y' . Ale pomôžu metódy riešenia lineárnych rovníc. Podľa nich sa máme najprv pozrieť na homogénnu rovnicu $y' + 4y = 0$, teda rovnicu bez pravej strany, a pri nej uvidieť jedno z riešení $y = e^{-4x}$. Presnejšie povedané, homogénna lineárna rovnica je taká, že všetky jej členy sú priamo úmerné niektorej derivácii y (samotné y je nultá derivácia y). Toto riešenie sa dá nájsť tak, že si člen $4y$ prehodíme na druhú stranu a potom ním predelíme, čím dostaneme $y'/4y = -1$, čo už je rovnica ktorá sa dá zintegrovat' podľa x . Osvedčený spôsob hľadania riešenia homogénnej lineárnej rovnice je predpokladať, že riešenie bude mať tvar $y = e^{\lambda x}$, a neznáme číslo λ určiť dosadením do rovnice. $y' + 4y = \lambda e^{\lambda x} + 4e^{\lambda x} = (\lambda + 4)e^{\lambda x} = 0$, ale keďže $e^{\lambda x}$ je vždy nenulové, rovnica môže platiť iba ak $\lambda + 4 = 0$. Takže tak či onak, našli sme jedno riešenie homogénnej rovnice, a teda všeobecné riešenie homogénnej rovnice bude $y = ce^{-4x}$. Ako nám to pomôže pri riešení nehomogénnej rovnice? Pomôže nám to tak, že použijeme me-

tódu variácie konštant, ktorá hovorí, že ak homogénnu rovnicu rieši funkcia, ktorá obsahuje konštantu c , tak nehomogénnu rovnicu bude riešiť taký istý výraz, kde ale c bude funkcia. Tak skúsme dosadiť $y = c(x)e^{-4x}$ do našej rovnice $y' + 4y = \cos x$ a dostaneme $c'(x)e^{-4x} - 4c(x)e^{-4x} + 4c(x)e^{-4x} = c'(x)e^{-4x} = \cos x$. Metóda nám zaručila že členy obsahujúce nederivované $c(x)$ sa nám vykrátia, a tak nám stačí vyjadriť si $c'(x) = (\cos x)e^{4x}$, zintegrovat' $\int (\cos x)e^{4x} dx = (\sin x)e^{4x} - 4 \int (\sin x)e^{4x} dx = (\sin x)e^{4x} + 4(\cos x)e^{4x} - 16 \int (\cos x)e^{4x} dx$ čím zistíme $c(x) = \int (\cos x)e^{4x} dx = (\sin x + 4 \cos x)e^{4x}/17 + c$ a teda $y = c(x)e^{-4x} = (\sin x + 4 \cos x)/17 + ce^{-4x}$. A tak máme výsledok:

$$y = (\sin x + 4 \cos x)/17 + ce^{-4x}$$

Príklad č.4 Nájdite riešenie rovnice

$$y' - 2y = 4$$

pri počiatočnej podmienke

$$y(-1) = 1$$

Riešenie: Tí vnímavjší si všimnú, že úpravou na tvar $y'/(4 + 2y) = 1$ možno úlohu riešiť ako úlohu na metódu separácie premenných, ale my ostatní postupujeme ako v predchádzajúcom príklade. Homogénnu rovnicu $y' - 2y = 0$ rieši $y = e^{\lambda x}$ pre $\lambda = 2$. Dosadením $y = c(x)e^{2x}$ do nehomogénnej rovnice dostaneme $c'(x) = 4e^{-2x}$ čoho riešením je $c(x) = -2e^{-2x} + c$ a to nám dá všeobecné riešenie $y = -2 + ce^{2x}$. Počiatočné podmienky hovoria že to má platiť pre $x = -1$ a $y = 1$. Z $1 = -2 + ce^{-2}$ vyplýva $c = 3e^2$ a preto riešenie našej úlohy je:

$$y = -2 + 3e^{2x+2}$$

Príklad č.5 Nájdite všeobecné riešenie rovnice

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

Riešenie: Máme tu homogénnu lineárnu rovnicu druhého rádu. Takže skúsime dosadiť $y = e^{\lambda x}$ a dostaneme rovnicu $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$, ktorá má iba jeden koreň $\lambda = 2$. To je zlé. Ak by sme mali dva rôzne korene λ_1 a λ_2 , vedeli by sme, že $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$ je riešenie, a keďže uz obsahuje dve (integračné) konštanty, tak je to všeobecné rie-

šenie. V našom prípade pomôže iba ďalší kus teórie, ktorý hovorí, že v prípade viacnásobného koreňa, nie len $y = e^{\lambda x}$, ale aj $y = xe^{\lambda x}$ (a prípadne aj $y = x^2e^{\lambda x}$ a tak ďalej, podľa násobnosti) je riešením. Čiže všeobecné riešenie našej rovnice je:

$$y = (c_1x + c_2)e^{2x}$$

Príklad č.6 Nájdite riešenie rovnice

$$y'' - 2y' - 3y = 0$$

pri okrajových podmienkach

$$y(0) = e$$

$$y(1) = 1$$

Riešenie: Zás homogénna lineárna rovnica, čiže skúsime $y = e^{\lambda x}$, dostaneme $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$, čo má dva korene, 3 a -1 čiže vieme, že všeobecné riešenie bude $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-x}$. Dosadením $x = 0$ a $y = e$ dostaneme $e = c_1 + c_2$, dosadením $x = 1$ a $y = 1$ dostaneme $1 = c_1e^3 + c_2e^{-1}$. Tuto sústavu vyriešime a zistíme, že $c_1 = 0$ a $c_2 = e$, preto riešenie je:

$$y = e^{1-x}$$

Príklad č.7 Nájdite riešenie rovnice

$$2y + y' - y'' = 0$$

pri počiatočných podmienkach

$$y(0) = 2$$

$$y'(0) = 1$$

Riešenie: Zás lineárna homogénna rovnica, skúsime $y = e^{\lambda x}$, dostaneme $2 + \lambda - \lambda^2 = 0$, čo má dva korene, 2 a -1 čiže vieme, že všeobecné riešenie bude $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-x}$. Dosadením $x = 0$ a $y = 2$ dostaneme $2 = c_1 + c_2$. V druhej podmienke vystupuje y' , takže si derivovaním všeobecného riešenia odvodíme $y' = 2c_1e^{2x} - c_2e^{-x}$ a dosadením $x = 0$ a $y' = 1$ dostaneme $1 = 2c_1 - c_2$. Tuto sústavu vyriešime a zistíme, že $c_1 = 1$ a $c_2 = 1$, preto riešenie je:

$$y = e^{2x} + e^{-x}$$