

Vzorové príklady k lineárnej algebre a geometrie pre aplikovaných informatikov k písomkam 4.4.2006, 5.4.2006

Zoznam obsahuje typické príklady. Na písomke bude niekoľko jednoduchších.

1. (M.Klein)Riešte sústavu rovníc maticovou metódou:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5$$

$$3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 2$$

$$2x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 3$$

- Prepíšte sústavu do tvaru: $A \cdot x = r$
- Nájdite $\det A$ a určte koľko riešení bude mať sústava.
- Určte, či existuje A^{-1} a ak existuje nájdite ju.
- Ak má sústava veľa riešení zapíšte ich všetky parametricky. (Nájdite priestor všetkých riešení.)

2. (M.Klein)Riešte sústavu rovníc maticovou metódou:

$$3x_1 + 2x_2 + 1x_3 = 2$$

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5$$

$$8x_1 + 7x_2 + 6x_3 = c$$

- Prepíšte sústavu do tvaru: $A \cdot x = r$
- Nájdite $\det A$ a určte koľko riešení bude mať sústava pre $c=9$ a pre $c=10$.
- Určte, či existuje A^{-1} a ak existuje nájdite ju.
- Pre $c=9$ aj pre $c=10$ ak má sústava veľa riešení zapíšte ich všetky parametricky. Nájdite priestor všetkých riešení.

3. (M.Klein)Určte determinant matice efektívnym spôsobom

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. (M.Klein) Zistite, či sú vektory lineárne závisle alebo nezávisle:

$\vec{v}_1 = (1, 2, 3, 4), \vec{v}_2 = (-2, 1, 3, 4), \vec{v}_3 = (2, 3, 4, 1), \vec{v}_4 = (2, 2, 2, 1)$ Návod: Akú hodnotu má determinant matice, utvorenej z lineárne závislých riadkov alebo stĺpcov a akú z lineárne nezávislých riadkov alebo stĺpcov?

5. (M.Klein) Zistite, či sú vektory lineárne závisle alebo nezávisle:

$\vec{v}_1 = (2, 3, 4, 5), \vec{v}_2 = (-2, 1, 7, 4), \vec{v}_3 = (2, 3, 4, 1)$ Návod: Nedá sa z vektorov vytvoriť štvorcová matica, nemôžeme rátať determinant, nemôžeme použiť predošlý postup. Iný postup: Ako sa mení lineárna závislosť alebo nezávislosť riadkov obdĺžnikovej matice (3 riadky, 4 stĺpce) pre ekvivalentných úpravách?

6. (M.Klein) Efektívnym spôsobom, (bez rátania štvorčiek bez merania vzdialenosti pravítkom) určte plochu útvaru v \mathbb{R}^2 , ktorý vznikne pospájaním bodov. A[6,3], B[3,2], C[4,7]

7. (P.Prešnajder) Nech

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Vypočítajte $\det A, A^{-1}, (A^{-1})^t$

- Nech

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

odpovedajú stĺpcom matice Podobne nech

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$$

odpovedajú stĺpcom matice $(A^{-1})^t$:

$$(A^{-1})^t = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$$

Dokážte, že platí

$$\vec{b}_i \cdot \vec{a}_j = \delta_{ij}.$$

8. (P.Prešnajder) Úpravami rozšírenej matice riešte sústavu rovníc

$$\begin{aligned}x + 2y &= 5 \\ 3x + 4y &= 2\end{aligned}$$

Presvedčte sa, že metóda determinantov

$$x = \frac{D_1}{D}, \quad y = \frac{D_2}{D}$$

dáva rovnaký výsledok.

9. (P.Prešnajder) Uvažujte symetrickú maticu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Nájdite vlastné hodnoty a vlastné vektory \vec{f}_1, \vec{f}_2 .
- Presvedčte sa, že vlastné vektory sú navzájom kolmé: $\vec{f}_1 \cdot \vec{f}_2 = 0$.
- Vypočítajte $\vec{f}_i \cdot (A\vec{f}_2)$.

10. (M.Klein) Nájdite analyticky geometrický útvar zadaný ako množina bodov

$$M = \left\{ x; \frac{|xA|}{|xB|} = 2, \text{ kde } A[1, 0], B[3, 0] \right\}$$

11. (P.Prešnajder) Nájdite sférické súradnice bodu $P = [1; 1; 1]$ v E_3 .

Aká je vzdialenosť bodu P od počiatku?

12. (P.Prešnajder) Nech v priestore \mathbb{R}^3 je daná priamka $p : \vec{x} = \vec{a}t + C$ a bod Q , ktorý neleží na priamke p . Určte vzdialenosť bodu Q od priamky p . Rátajte najprv všeobecne a potom si zvolte nejaké hodnoty a vyčísľte výsledok pre ne:

Napr.: $Q[0, 0, 2]$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Návod1: Zapište parametricky všeobecný bod $P[a_1 * t + c_1, a_2 * t + c_2, a_3 * t + c_3]$

a vzdialenosť $d(t)=PQ$ od konkrétneho bodu Q ako funkciu parametra t . Nájdite parameter t ako bod v ktorom má funkcia $d(t)$ minimum. ($d'(t)=0$,derivácie,minulý semester.)

Návod2: Zapište parametricky všeobecný bod $P[a_1*t+c_1, a_2*t+c_2, a_3*t+c_3]$ a nájdite $P \in p$ tak (teda nájdite parameter t tak), aby $PQ \perp p$,teda aby $\vec{a} \cdot (P - Q) = 0$

13. (P.Prešnajder,M.Klein)Nech rovina v priestore je daná rovnicou $x_1+2x_2+3x_3-4=0$ určte jej vzdialenosť od počiatku a od bodu $A[7,3,2]$

14. (P.Prešnajder,M.Klein)V priestore \mathbb{R}^3 určte priesečník (priamka zadaná parametricky) a uhol dvoch rovín $R_1(\vec{a} \cdot \vec{x} + c = 0), R_2(\vec{b} \cdot \vec{y} + d = 0)$ Rátajte pre $\vec{a} = (1, 2, 3), c = -6, \vec{b} = (3, 2, 1), d = -6$

15. (M.Klein)V \mathbb{R}^3 určte priesečník a uhol roviny $R \vec{a} \cdot \vec{x} + c = 0$ a priamky $p: \vec{x}(t) = \vec{b} \cdot t + C$. Rátajte pre nejaká konkrétne hodnoty.

16. (P.Prešnajder) Určte uhol dvoch priamok v rovine \mathbb{R}^2

$$p: a_1x_1 + a_2x_2 + c = 0 \text{ (t.j. } \vec{a} \cdot \vec{x} + c = 0)$$

$$q: b_1y_1 + b_2y_2 + d = 0 \text{ (t.j. } \vec{b} \cdot \vec{y} + d = 0)$$

Určte x_2 a y_2 , tak aby $P[1, x_2] \in p$ a $Q[1, y_2] \in q$ a potom vypočítajte vzdialenosť bodov P a Q .(| PQ |) Nájdite vzťah pre vzdialenosť bodov najprv všeobecne pre ľubovoľné vektory \vec{a}, \vec{b} a na konci si zvolte konkrétne vektory, dosadte do všeobecného výsledku a vyčísľte vzdialenosť.

17. (P.Prešnajder) Uvažujte elipsu $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$

Nájdite bod $P = [x_P, 1]$, tak aby ležal na elipse. Nájdite dotyčnicu v bode P k elipse a kolmicu v tom istom bode na elipse.

18. (P.Prešnajder,M.Klein) Sú dané 2 priamky v parametrickom tvare. (uvažujte obe prípady:dvojrozmerný \mathbb{R}^2 aj trojrozmerný priestor \mathbb{R}^3)

$$p: \vec{x}(t) = \vec{a} \cdot t + C, t \in \mathbb{R}, \vec{x}, \vec{a}, C \in \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$$

$$q: \vec{y}(s) = \vec{b} \cdot s + D, s \in \mathbb{R}, \vec{y}, \vec{b}, D \in \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$$

Nájdite uhol oboch priamok

V \mathbb{R}^2 nájdite priesečník priamok.

V \mathbb{R}^3 nájdite body $A \in p, B \in q$, tak aby úsečka AB bola najkratšia spojnice oboch priamok (pozor priamky môžu byť mimobežné). Určte vzdialenosť bodov A a B.

V \mathbb{R}^3 nech sa obe priamky pretínajú. Nájdite rovinu R danú oboma priamkami (obe priamky ležia v rovine) v tvare $\vec{N} \cdot \vec{X} + q = 0$

Nech bod $P[x_P, 1] \in p$. Určte x_P .

Vypočítajte vzdialenosť P od priamky q. $|Pq|$

Nájdite vzťah pre vzdialenosť bodov najprv všeobecne pre ľubovoľné vektory \vec{a}, \vec{b} a body C, D a na konci si zvolte konkrétne hodnoty pre oba prípady $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ a numericky dorátajte.

19. (M.Klein) Použitím skalárneho súčinu ukážte, že všetky tri výšky v ľubovoľnom trojuholníku sa pretínajú v jednom bode alebo ekvivalentné tvrdenie: Polpriamka vychádzajúca z jedného vrcholu C trojuholníka prechádzajúca cez priesečník dvoch výšok, ktoré vychádzajú zo zvyšných dvoch bodov A, B **je kolmá** na stranu AB (teda je to tiež výška).

Návod: (kreslite si to) trojuholník ABC, strany $a=BC, b=AC, c=AB$, výšky sú kolmé na strany $v_a \perp a, v_b \perp b$, priesečník oboch výšok nech je $O = v_a \cap v_b$, označme si $\vec{u} = \vec{OA}, \vec{v} = \vec{OB}, \vec{t} = \vec{OC}$. Z konštrukcie zrejme $\vec{c} = \vec{v} - \vec{u}, \vec{a} = \vec{v} - \vec{t}, \vec{b} = \vec{t} - \vec{u}$, a tiež $\vec{u} \perp \vec{a}, \vec{v} \perp \vec{b}$ Chceme ukázať, že $\vec{t} \perp \vec{c}$

Vidíme, že $\vec{u} \perp \vec{a} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot (\vec{t} - \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{t} = \vec{u} \cdot \vec{v} (R1)$

Podobne $\vec{v} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{t} = \vec{v} \cdot \vec{u} (R2)$

Chceme ukázať, že platí nasledujúca kolmosť alebo teda, že platí ekvivalentná rovnica:

$$\vec{t} \perp \vec{c} \Leftrightarrow \vec{t} \cdot \vec{u} = \vec{t} \cdot \vec{v} (R3)$$

Presvedčte sa, že z rovností skalárnych súčinov (R1) a (R2) naozaj vyplýva rovnosť skalárnych súčinov (R3) (zreťazite rovnice a využijete komutatívny zákon pre skalárny súčin.)