

Vzorové príklady k lineárnej algebre a geometrie pre aplikovaných informatikov k písomke 23.5.2006

Nezabudnite si pozrieť aj Diferenciálne rovnice.

1. (M.Klein) Riešte sústavy $Ax = b \dots (A|b)$ (ak sústavy majú veľa riešení, zapíšte ich všetky parametricky):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 & 1 & -5 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -4 & -3 & 5 & 2 \\ -1 & -2 & -2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \end{array} \right)$$

Pre kontrolu medzivýsledok: najjednoduchšie ekvivalentné sústavy sú

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ & 1 & 1 & 0 & 5 \\ & & & 1 & -2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 & -3 \\ & & 1 & 3 & 4 \end{array} \right)$$

2. (P.Prešnajder) Uvažujte symetrickú maticu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Nájdite vlastné hodnoty a vlastné vektory \vec{f}_1, \vec{f}_2 .
- Zistite uhol α , ktorý zvierajú vlastné vektory.

3. (M.Klein) Nech je daný bod $A = [2, 3]_S$ v ortogonálnom ($x \perp y$) súradnicovom systéme S s osami x, y . Nájdite súradnice bodu A v súradnicovom systéme S' s osami x', y' . Súradnicový systém S' ktorý má rovnobežné osi s osami súradnicového systému S ($x' \parallel x, y' \parallel y$), ale posunutý počiatok do bodu $[1, 4]_S = [0, 0]_{S'}$.

Nájdite prevodové vzťahy pre všeobecný bod: $[x', y']_{S'} = [?, ?]_S, [x, y]_S = [?, ?]_{S'}$

Poznámka 1: táto transformácia súradníc sa nazýva translácia.

Poznámka 2: Všimnite si, že hovoríme o jednom bode a viacerých súradniciach toho istého bodu.

Poznámka 3: Zámenu súradníc v prípade, že skúmaný objekt (bod, priamka, teleso, ...) sa nezmení (čo je tento prípad) a popisná sústava sa zmení nazývame ako pasívna zámena súradníc, pasívna transformácia alebo zámena/transformácia v pasívnom zmysle.

Poznámka 4: Zámenu súradníc v prípade, že skúmaný objekt (bod, priamka, teleso, ...) sa zmení (čo nie je tento prípad) a popisná sústava sa nezmení označujeme ako aktívna zámena (zmena) súradníc, aktívna transformácia alebo zámena/transformácia v aktívnom zmysle.

4. V súradnicovom systéme S máte kúžeľosečku:

$$4x^2 + 8xy + 8y^2 = 8 \tag{1}$$

Zapíšte tú istú kúžeľosečku v súradnicovom systéme $S' = S + (5, 7)^T$, teda $[0, 0]_{S'} = [5, 7]_S$. (Všimnite si vznik lineárnych členov.) Návod: Použite vzťahy z predošlej úlohy a dosadte ich do kúžeľosečky.

5. V súradnicovom systéme S máte kúžeľosečku $4x^2 + 8xy + 8y^2 + 8x + 8y = 32$ Nájdite taký súradnicový systém S' (teda jeho posunutie oproti S), v ktorom nebude mať táto kúžeľosečka lineárne členy. Akú úlohu teraz plní počiatok súradnicového systému S' (teda bod $[0, 0]_{S'}$)?

6. Nech je daný bod $A = [5, 2]_S^T$ v ortogonálnom $(x \perp y)$ súradnicovom systéme S s osami x, y a bázovými vektormi $\vec{e}_1 = (1, 0)_S^T, \vec{e}_2 = (0, 1)_S^T$. Bodu A môžeme teda napísať ako vektor $A = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$. Ďalej majme súradnicový systém S' s neortogonálnymi osami x', y' v smeroch bázových vektorov $f_1 = (1, 0), f_2 = (1, 1)$. Nájdite súradnice bodu A v systéme S' . (Inak povedané rozložte vektor A do bázy $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$) Riešenie: nakreslite si situáciu na obrázok. Bodom A vedieme jednu priamku p_1 rovnobežnú s vektorom \vec{f}_1 a druhú priamku rovnobežnú s vektorom \vec{f}_2 . (Hovoríme, že vedieme rovnobežné priemety.) Nájdeme priesečníky týchto priamok s osami $B = p_1 \cap y', C = p_2 \cap x'$. Bod B leží na osi y' , ktorá je v smere vektora \vec{f}_2 , teda polohový vektor $B = \vec{B} = 0\vec{B} \parallel \vec{f}_2$ alebo $B = \alpha \vec{f}_1$. Dostali sme druhú súradnicu bodu A v systéme S' . (Konkrétne $\alpha = 2$) Podobne pre prvú súradnicu dostaneme $\beta = 3$.

$$\text{Takže } A = [5, 2]_S = [3, 2]_{S'} = 3\vec{f}_1 + 2\vec{f}_2$$

$$\text{Všeobecne dostávame: } [x, y]_S = [x - y, y]_{S'} =: [x', y']_{S'}$$

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = TX$$

Poznámka 1: Hovoríme aj, že sme prešli do inej bázy ,alebo, že sme bod A vyjadrili v inej báze. (teraz neortogonálnej)

Poznámka 2: Na chvíľu uvažujme vyššie uvedenú maticu transformácie T ako maticu v aktívnom zmysle (pozri poznámky v príklade 3) v danej jedinej báze $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, Vidíme, že body $[0, 1]$ a $[0, 2]$ majú vzájomnú vzdialenosť 1. Po zobrazení maticou T dostaneme body $[-1, 1]$ a $[-2, 2]$, ktoré majú už vzdialenosť $\sqrt{2}$. Vidíme, že transformácia nezachováva vzdialenosti dvoch bodov. Podobne keby sme zobrazili celý trojuholník touto transformáciou, tak by sa vo všeobecnosti nazachovali nielen veľkosti strán ale ani pomery strán. Teda nezachovali by sa proporcie trojuholníka. Aspoň jeden uhol v trojuholníku by sa musel zmeniť. Teda zobrazenie T nám nezachováva ani uhly. Každé zobrazenie, ktoré nezachováva vzdialenosti a uhly sa nazýva neortogonálne zobrazenie.

Poznámka 3: Pozri aj príklad 15

7. (M.Klein)Nech je daný bod $A = [2, 3]_S$ v ortogonálnom $(x \perp y)$ súradnicovom systéme S s osami x, y . Ďalej majme iný ortogonálny súradnicový systém S' (osi $x' \perp y'$), ktorý má rovnaký počiatok $[0, 0]_S = [0, 0]_{S'}$, ale osi sústavy S' a S nie sú rovnobežné: $\angle(x, x') = \angle(y, y') = \alpha = \pi/4$. (Systém S' je zrotovaný v porovnaní so systémom S o uhol α proti smeru hodinových ručičiek.)

- Nájdite súradnice $A = [?, ?]_{S'}$ toho istého bodu A v systéme S'
- Nájdite prevodové vzťahy pre všeobecný bod a pre všeobecné α : $[x', y']_{S'} = [?, ?]_S, [x, y]_S = [?, ?]_{S'}$ Zapište prevodové vzťahy maticovo: $X' = R_\alpha X$, kde $X' = (x', y')$ a $X = (x, y)$. Napíšte maticu R_α
- Nech $\vec{e}_1 = (1, 0)_S^T, \vec{e}_2 = (0, 1)_S^T$ je báza vo vektorovom priestore \mathbb{R}^2 a nech $\vec{f}_1 = (1, 0)_{S'}^T, \vec{f}_2 = (0, 1)_{S'}^T$ je iná báza v tom istom vektorovom priestore. Napíšte prevodové vzťahy medzi vektormi oboch báz.

Návod: Nakreslite si obrázok a z obrázka určte najprv body $[1, 0]_S = [?, ?]_S, [0, 1]_S = [?, ?]_{S'}$. Z lineariry potom pre ľubovoľné $[x, y]_S = x[1, 0]_S + y[0, 1]_S = \dots_{S'}$, Rovnako postupujete aj pri opačnom vzťahu: $[1, 0]_{S'} = \dots [?, ?]_S$

Výsledok jedným smerom: Z obrázka priamo: $[1, 0]_S = [\cos(\alpha), -\sin(\alpha)]_{S'}$ a $[0, 1]_S = [\sin(\alpha), \cos(\alpha)]_{S'}$ a teda $[x, y]_S = [x \cos[\alpha] + y \sin[\alpha], -x \sin(\alpha) + y \cos(\alpha)]_{S'} =: [x', y']_{S'}$

Poznámka 1: Matica , ktorá viaže súradnice tých istých objektov v oboch súradnicových systémoch S, S' sa nazáva matica prechodu.

Poznámka 2: Táto transformácia súradníc a báz sa nazýva rotácia.

Poznámka 3: Matica prechodu R_α sa nazýva matica rotácie o uhol α

Poznámka 4: Všimnite si, že v dvojrozmernom prípade rotácia je daná len uhlom rotácie α ale vo viacrozmerných prípadoch (napr 3D priestor), musí byť rotácia daná aj rovinou v ktorej rotujeme. (V 3D prípade namiesto roviny uvádzame väčšinou os , okolo ktorej rotujeme. Táto os je kolmá na rovinu rotácie.)

Poznámka 5: Porovnajete s príkladom 6: Tu sa pri rotácii ľubovoľných dvoch bodov o ten istý uhol α v aktívnom zmysle sa ich vzdialenosť nemení a teda pri rotácii trojuholníka sa nemení, žiadna strana, teda ani uhly v trojuholníku.

8. Majme kúžeľosečku $4x^2 + 9y^2 = 36$ v sústave S (je to elipsa, aké má hlavné a vedľajšie poloosi?). Napíšte rovnicu tej istej kúžeľosečky v sústave S' zrotovanej o uhol $\alpha = 45^\circ$, ($\sin(45^\circ) = \cos(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$). Všimnite si vznik zmiešaných členov typu niečo.x.y.
Výsledok: $[4 + 5 \sin^2(\alpha)]x'^2 + [10 \sin(\alpha) \cos(\alpha)]x'y' + [4 + 5 \cos^2(\alpha)]y'^2 = 36$ teda výsledok je typu $ax'^2 + bx'y' + cy'^2 = 36$, a má zmiešaný člen $bx'y'$.

9. Majme kúžeľosečku $29x^2 + 24xy + 36y^2 = 180$ v sústave S . Napíšte rovnicu tej istej kúžeľosečky v sústave S' zrotovanej o taký uhol α , aby zanikol zmiešaný člen. Nájdite uhol α
Výsledok: $\alpha = -\arcsin(3/4)$; $4x'^2 + 9y'^2 = 36$

10. . Ukážte , že pre každú štvorcovú maticu Q platí toto: Ak má Q stĺpce navzájom kolmé a normované na 1 (teda veľkosti vektorov utvorených zo stĺpcov matice Q sú jednotkové a) tak $Q^T = Q^{-1}$ Ukážte to aspoň pre matice 2×2 .

Poznámka 1: Všeobecné transformácie súradníc ktoré, sú popísané takýmito maticami sa nazývajú ortogonálne transformácie a matice sa nazývajú ortogonálne matice. To sú také transformácie súradníc, ktoré zachovávajú vzdialenosti a uhly. Ortogonálne matice značíme väčšinou O . Determinant ortogonálnych matíc môže byť len $\det(O) = \det(Q) = \pm 1$

Poznámka 2: Determinant $\det(O) = -1$ znamená, že transformácia O popisuje preklopenie.

Poznámka 3: Determinant $\det(O) = +1$ znamená, že matica O popisuje rotáciu v nejakej rovine. (okolo nejakej osi v 3D). Matica sa potom nazýva špeciálna ortogonálna matica.

11. Ukážte, že súčin $O = O_1 O_2$ dvoch a viacerých špeciálnych ortogonálnych matíc je špeciálna ortogonálna matica.

Teda ukážte implikáciu:

$$O_1^T O_1 = I \wedge O_2^T O_2 = I \wedge \det(O_1) = 1 \wedge \det(O_2) = 1 \Rightarrow O^T O = I \wedge \det(O) = 1$$

Dôsledok: Skladaním rotácií v hocijakom poradí v hocijakých rovinách (alebo okolo osí) a o hocijaký uhol dostávame tzv. špeciálne ortogonálne transformácie , ktoré tvoria tzv. špeciálnu ortogonálnu grupu. $O^T O = I, \det(O) = 1$. Rotačné matice sú podgrupou ortogonálnych matíc. Skladanie rotácií je reprezentované práve súčinom rotačných matíc: $R = R_1 \cdot R_2 \dots R_N$ K celkovej rotácii zloženej z ostatných sa dá tiež nájsť 1 rovina, v ktorej sa efektívne deje táto rotácia R . Nájsť túto rovinu (príp. os v 3D) je zložité.

12. Spojte výsledky predošlých 2 príkladov a príkladu č. 7 a dedukujte, že pre maticu rotácie v 2D: $R_\alpha^T = R_\alpha^{-1} = R_{-\alpha}$

13. Diagonalizujte kvadratickú formu ortogonálnou transformáciou. (Nájdite maticu prechodu do iného súradnicového systému, ktorá zjednodušuje tvar kvadratickej formy a

zachováva vzdialenosti a uhly (pozri príklad 2)):

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Návod: Z výsledku predošleho príkladu 10 dedukujte, že vlastná (=jordanová) diagonalizácia (alebo rozklad) symetrickej matice $S = PDP^{-1}$ a diagonalizácia matice kvadratickej formy $S = PDP^T$ sú totožné v prípade použitia vhodnej rotácie $P = R_\alpha$ pre nejaké α .

Dôsledok: Matica prechodu, ktorá nám zjednoduší (=diagonalizuje) kvadratickú formu a zároveň zachová uhly a vzdialenosti je daná rotačnou maticou R_α , ktorej stĺpce sú utvorené z vlastných vektorov matice kvadratickej formy S.

Dôsledok 2: Vlastné vektory sú osi kužeľosečiek.

Poznámka: Pozri aj príklad 16.

14. (M.Klein) Nech je daná množina bodov $E = \{X = (x, y); 4x^2 + 8xy + 8y^2 + 6x + 6y = 128\}$ a body $A[-1, 0], B[1, 1]$. Nájdite prienik množiny E s priamkou AB.

15. V istej fabrike vyrábajú slivkový džem (lekvár) (nech jeden liter je označený vektorom \vec{dz}_1) a marhuľový džem (nech jeden liter je \vec{dz}_2) za použitia konzervačnej prísady citrónu (nech jeden liter je \vec{c}). Potom vyrábajú aj ich zmesi v jednolitrových pohároch. Zmes v objemovom pomere 60% marhuľového, 37% slivkového a 3% citrónu predávajú pod názvom mamičkina pochúťka (vektor \vec{m}). Zmes v pomere 40% marhuľového 55% slivkového a 5% citrónu vyrábajú pod názvom babičkina pochúťka (\vec{b}). Zmes v pomere 10% marhuľového 50% slivkového a 40% citrónu predávajú pod názvom svokrina pochúťka. \vec{s} Otázka znie koľko kusov akej lahôdky sa dá urobiť zo 165 litrov marhuľového džemu, 160 litrov slivkového za použitia 45 litrov citrónovej šťavy, keď nemáme žiadne straty. Inak povedané: Nájdite vyjadrenie vektora $(160, 165, 45)_S = 160\vec{dz}_1 + 165\vec{dz}_2 + 45\vec{c}$ v báze $\{\vec{m}, \vec{b}, \vec{s}\}$ súradnicového systému S'.

Poznámka 1: Pre pestovateľov ovocia sú prirodzené jednotky kusy, kilá alebo objem. Vzali sme objem. Pre distribútora pochúťok lekváru do obchodov je prirodzená jednotka 1 kus tovaru. Zámená bázy je teda úplne prirodzená vec, v danej firme dokonca nutná vec.

Poznámka 2: Hypotetická otázka: Ako treba namiešať všetky tri pochúťky aby sme dostali naspäť len marhuľový džem?

Poznámka 3: Jedna sa zrejme o neortogonálnu transformáciu súradníc.

16. Lagrangeovou metódou diagonalizujte kvadratickú formu a určte typ kužeľosečky.

$$x^2 - 5y^2 + 2z^2 + 4xy + 6xz + 2yz = 60 \quad (2)$$

Pozor.: Lagrangeovou metódou nedostávate ortogonálnu transformáciu, takže sa menia dĺžky a uhly a neviete zistiť z výsledného tvaru reálne parametre pôvodnej kužeľosečky. (napr. poloosi elipsoidu alebo elipsy) Viete aspoň podľa signatúry určiť typ kužeľosečky.